非線型可積分系の数理

高　崎　金　久

(1992.9.28 ～ 10.2 北海道大学での集中講義
講義録　本間盛行　記)

Series ♯ 25. February, 1993

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

♯ 1: T. Morimoto, Equivalence Problems of the Geometric Structures admitting Differential Filtrations, 14 pages. 1987.
♯ 2: J.L. Heitsch, The Lefshetz Theorem for Foliated Manifolds, 59 pages. 1987.
♯ 3: K. Kubota (Ed.), 第 12 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 77 pages. 1987.
♯ 4: J.Tilouine, Kummer's criterion over Λ and Hida's Congruence Module, 85 pages. 1987.
♯ 5: Y.Giga(Ed.),Abstracts of Mathematical Analysis Seminar 1987, 17 pages. 1987.
♯ 6: T.Yoshida (Ed.), 1987 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 96 pages. 1988.
♯ 7: S. Izumiya,G. Ishikawa (Eds.), "特異点と微分幾何" 研究集会報告集,1988.
♯ 8: K. Kubota (Ed.), 第 13 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 76 pages. 1988.
♯ 9: Y. Okabe (Ed.), ランジュヴァン方程式とその応用予稿集, 64 pages. 1988.
♯ 10: I. Nakamura (Ed.), Superstring 理論と K3 曲面, 91 pages. 1988.
♯ 11: Y. Kamishima (Ed.), 1988年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 73 pages. 1989.
♯ 12: G. Ishikawa, S. Izumiya and T. Suwa (Eds.), "特異点論とその応用" 研究集会報告集 Proceedings of the Symposium "Singularity Theory and its Applications," 317 pages. 1989.
♯ 13: M. Suzuki, "駆け足で有限群を見てみよう"1987 年 7 月北大での集中講義の記録, 38 pages. 1989.
♯ 14: J. Zajac, Boundary values of quasiconformal mappings, 15 pages. 1989
♯ 15: R. Agemi (Ed.), 第 14 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 55 pages. 1989.
♯ 16: K. Konno, M.-H. Saito and S. Usui (Eds.), Proceedings of the Meeting and the workshop "Algebraic Geometry and Hodge Theory" Vol. I, 258 pages. 1990.
♯ 17: K. Konno, M.-H. Saito and S. Usui (Eds.), Proceedings of the Meeting and the workshop "Algebraic Geometry and Hodge Theory" Vol. II, 235 pages. 1990.
♯ 18: A. Arai (Ed.), 1989 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 72 pages. 1990.
♯ 19: H. Suzuki (Ed.), 複素多様体のトポロジー Topology of Complex Manifolds, 133 pages. 1990.
♯ 20: R. Agemi (Ed.), 第 15 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 65 pages. 1991.
♯ 21: Y. Giga, Y. Watatani (Eds.), 1990 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 105 pages. 1991.
♯ 22: R. Agemi (Ed.), 第 16 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 50 pages. 1991.
♯ 23: Y. Giga, Y. Watatani (Eds.) 1991 年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 89 pages. 1992.
♯ 24: K. Kubota (Ed.), 第 17 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 29 pages. 1992.

はじめに

この講義ノートは１９９２年９月の高崎金久さんの北海道大学理学部数学教室における集中講義をもとに大学院学生の本間盛行さんがまとめ、高崎金久さんが加筆したものです。このノートが代数解析学、特に佐藤幹夫先生が創始された完全可積分系の代数解析的アプローチを志す若い学生のためになることを望みます。講義ノート作成の労をとられた高崎さん、本間さんに感謝いたします。

１９９３年2月　　戸瀬 信之

目次

I：戸田格子力学系

この章の全般的参考文献は
［1］戸田盛和 "非線形格子力学"（岩波）
および，その参考文献

1. Hamilton力学系としての定義

• 空間 (q_i, p_i) （phase space, symplectic多様体）上のHamilton函数Hを次のように定義する。

$$H = \frac{1}{2}\sum_i p_i^2 + \sum_i e^{q_i - q_{i+1}} + 定数$$

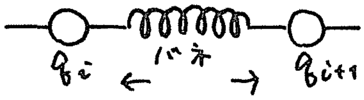
運動方程式を求めてみると

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = p_i \ , \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = e^{q_{i-1}-q_i} - e^{q_i - q_{i+1}}$$

Newton方程式の形では，

$$\frac{d^2 q_i}{dt^2} = e^{q_{i-1}-q_i} - e^{q_i - q_{i+1}}$$

これが<u>戸田格子の方程式</u>である。
q_i と q_{i+1} がはなれる程ポテンシャルが減少する，つまり反発力の働く系を記述している。



• 添字 i の範囲を限定しなかったが，次のような場合が考えられる。

□ 有限格子

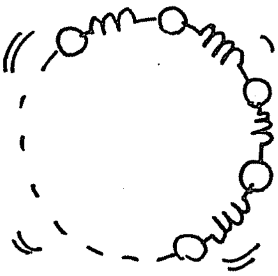
① 非周期的な場合 ‥‥ この場合を扱う。「初等的」である。

$q_{-1} = -\infty$ ， $q_{N+1} = +\infty$

この場合，時間とともに，各 q_i はどんどん離れていくであろう。

② 周期的な場合 ‥‥ テータ函数と関係してくる。「高等/超越的」である。

$q_{i+N} = q_i$



□ 無限格子

① 両側無限 , $i \in \mathbb{Z}$ を動く, これは上の周期的な場合を含んでいる。

② 片側無限 $i \in \mathbb{Z}_+$ を動く, これは「初等的」である。

2. 有限次元 非周期的 格子

- 変数は $q_0, \cdots, q_N$, $p_0, \cdots, p_N$, 方程式は

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 q_0}{dt^2} = -e^{q_0 - q_1} & (q_{-1} = -\infty \text{ を反映}) \\ \dfrac{d^2 q_i}{dt^2} = e^{q_{i-1} - q_i} - e^{q_i - q_{i+1}} & i = 1 \sim N-1, \\ \dfrac{d^2 q_N}{dt^2} = e^{q_{N-1} - q_N} & (q_{N+1} = +\infty \text{ を反映}) \end{cases}$$

このセクションの目標は, 上の方程式系が完全積分可能系であることを示し, 初期値問題を解くことである。

注) (q_i, p_i) 空間上の Hamilton 函数 H によって定義された力学系

$$\frac{d}{dt} q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{d}{dt} p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

において,

函数 I が保存量であるとは, 解 $(q_i(t), p_i(t))$ 上

$I(q_i(t), p_i(t)) = 0$ となることである。

- 全運動量 $\sum_{i=0}^{N} p_i$ は保存量である。

実際 $\frac{d}{dt}\sum_{i=0}^{N} p_i = \sum_{i=0}^{N}\frac{d^2 q_i}{dt^2} = -e^{q_0-q_1} + \sum_{i=1}^{N-1}\left(e^{q_{i-1}-q_i} - e^{q_i-q_{i+1}}\right) + e^{q_{N-1}-q_N}$

$= 0$ ■

このことから重心の座標 $\sum q_i$ は等速直線運動を行っているので，座標をのりかえて $\sum p_i = 0$ としてよい。

- 「独立な」保存量が一つみつかる度に，自由度を一つずつ落していける。これをくりかえして，ついに1次元の軌道（解）にまで至ることができるのが完全積分可能系である。

3. 変数の変換 ― Lax方程式へ

- 新しい変数 α_i, β_i を次のように定義する。

$$\begin{cases} \alpha_i = \exp\left(\dfrac{q_i - q_{i+1}}{2}\right) & (i = 0 \sim N-1),\ \alpha_N = 0 \\ \beta_i = -p_i & (i = 0 \sim N) \end{cases}$$

（$\beta_0 + \cdots + \beta_N = 0$ に注意）

注）α_i, β_i は正準座標系ではない。

この座標系で運動方程式を書くと，

$$\begin{cases} \dfrac{d\alpha_i}{dt} = \dfrac{1}{2}\alpha_i(\beta_{i+1} - \beta_i) \\ \dfrac{d\beta_i}{dt} = \alpha_i^2 - \alpha_{i-1}^2 \end{cases}$$

となる。（定義式を直接微分すればよい）

ここで，更に次のような行列，$\mathcal{L}$ 及び $\mathcal{A}$ を導入する。

$$\mathcal{L} \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \beta_0 & \alpha_0 & & & \\ \alpha_0 & \beta_1 & \alpha_1 & & 0 \\ & \alpha_1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \alpha_{N-1} \\ 0 & & & \alpha_{N-1} & \beta_N \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ N-1 \\ N \end{array} \qquad \mathcal{A} \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\alpha_0}{2} & & & \\ -\frac{\alpha_0}{2} & 0 & \frac{\alpha_1}{2} & & 0 \\ & -\frac{\alpha_1}{2} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \frac{\alpha_{N-1}}{2} \\ 0 & & & -\frac{\alpha_{N-1}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

この $\mathcal{L}$ と $\mathcal{A}$ を使うと、先の方程式は

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = [\mathcal{A}, \mathcal{L}]$$

（右辺は行列のbracket積）

となる。
この方程式を Lax方程式 と呼ぶ。

この形は非常に強力で、Lax方程式から、保存量の存在、初期値問題の解法、余随伴軌道の方法などが全て出て来るのである。

4. Lax方程式の応用 − 保存量の存在

● 具体的な応用に進む前に、更にもう一つの変数を導入しておこう。（ただしこのセクションでは使われない。）

τ函数 $\tau_0, \ldots, \tau_{N+1}$ を次で定義する。

$$\tau_0 = 1, \quad e^{-q_i} = \frac{\tau_{i+1}}{\tau_i}, \quad \tau_{N+1} = 1$$

この時、戸田格子の方程式は次の形に化ける。

$$\frac{d^2}{dt^2}(\log \tau_i) = \frac{\tau_i \tau_{i-1}}{\tau_i^2} \qquad \left(\text{あるいは} \quad \tau_i \frac{d^2\tau_i}{dt^2} - \left(\frac{d\tau_i}{dt}\right)^2 = \tau_{i+1}\tau_{i-1} \right)$$

● τ函数は、α_i, β_i より更に根源的な変数であるが、そのことはセクションがすすむにつれて、あきらかとなる。

- $\dfrac{d\mathcal{L}}{dt} = [\mathcal{A}, \mathcal{L}]$ の保存量の存在

今 $U(t)$ を $\dfrac{dU}{dt} = \mathcal{A}U$, $U(0) = I$

によって定義すると,

$$\mathcal{L} = U\mathcal{L}(0)U^{-1}$$ である。

(右辺を微分すると, U の定義から, Lax 方程式を満たすことがただちにわかる。)

この式より

$\mathrm{tr}\,\mathcal{L}, \mathrm{tr}\,\mathcal{L}^2, \ldots\ldots, \mathrm{tr}\,\mathcal{L}^{N+1}$ は保存量である。

- 例えば $\mathrm{tr}\,\mathcal{L} = \sum \beta_i = -$(全運動量), $\mathrm{tr}\,\mathcal{L}^2 = \sum \beta_i^2 + 2\sum \alpha_i^2 = \sum p_i^2 + 2\sum \exp(q_i - q_{i+1}) =$ (全エネルギー)。

- 更に $\mathcal{L}$ と $\mathcal{L}(0)$ の固有多項式が一致するので, $\mathcal{L}$ の固有値 $\lambda_1, \cdots, \lambda_{N+1}$ も保存量である。(スペクトル保存性)

- 注1) $\mathcal{L}$ の固有値 $\lambda_1 \ldots \lambda_{N+1}$ と連分数展開を利用して, 初期値問題をとく Moser の方法については [1] 戸田 参照.

- 注2) KdV 方程式においては, 上の $\mathcal{L}$ や $\mathcal{A}$ の代りに常微分作用素, bracket は作用素のそれに代る。この場合もスペクトル保存性などが成立する。
(KdV 方程式の Lax 表示)

5. Lax 方程式の応用 —— QR 分解による初期値問題の解法

- 以後変数は実とする。
- QR 分解とは?
任意の実正則行列は三角行列と直交行列の積に分解される。

$$P = RQ$$ R: 下三角行列, Q: 直交行列

(与えられた行列 P の横vectorに対するGram-Schmidtの直交化を行えばよい。
これは $GL(N+1)$ の岩沢分解に他ならない。)

・解法

① 初期値 $\mathcal{L}(0)=\begin{pmatrix} \diagdown\diagdown & 0 \\ 0 & \diagdown\diagdown \end{pmatrix}$ (三重対角かつ対称) に対して.

$\exp(\frac{t}{2}\mathcal{L}(0))$ をQR分解する。

$$\exp\left(\frac{t}{2}\mathcal{L}(0)\right) = R^{-1}Q \qquad (R\text{ではなく}R^{-1}\text{と書いておく})$$

② $\mathcal{L}(t)$, $\mathcal{A}(t)$ を次で定義する。

$$\begin{cases} \mathcal{L}(t) \overset{\text{def}}{=\!=} Q\mathcal{L}(0)Q^{-1} = R\mathcal{L}(0)R^{-1} \\ \mathcal{A}(t) \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{1}{2}(\mathcal{L})_{>0} - \frac{1}{2}(\mathcal{L})_{<0} \end{cases}$$

定義から $Q=R\exp(\frac{t}{2}\mathcal{L}(0))$ ゆえ.

ここで行列 P に対して $(P)_{>0}$ は対角線もこめて下三角部分を0としたもの

$(P)_{<0}$ は対角線もこめて上三角部分を0としたもの

③ $$\mathcal{L}=\begin{pmatrix} \beta_0 & \alpha_0 & & 0 \\ \alpha_0 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \alpha_{N-1} \\ 0 & & \alpha_{N-1} & \beta_N \end{pmatrix} \qquad \mathcal{A}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \alpha_0 & & 0 \\ -\alpha_0 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \alpha_{N-1} \\ 0 & & -\alpha_{N-1} & 0 \end{pmatrix}$$

の形で Lax eq の解である。

∵) $$Re^{\frac{t}{2}\mathcal{L}(0)} = Q \quad \text{の両辺を微分して.}$$

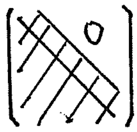
$$\left(\frac{dR}{dt}+\frac{1}{2}R\mathcal{L}(0)\right)e^{\frac{t}{2}\mathcal{L}(0)} = \frac{dQ}{dt}$$

両辺に $\exp(\frac{t}{2}\mathcal{L}(0))=R^{-1}Q$ を代入, 右から Q^{-1} をかけて.

$$\frac{dR}{dt}R^{-1} + \frac{1}{2}R\mathcal{L}(0)R^{-1} = \frac{dQ}{dt}Q^{-1} \overset{\text{def}}{=\!=} \mathcal{A}'$$

Q: 直交ゆえ, $\mathcal{A}'$ は交代行列である。(実はこの $\mathcal{A}'$ が上の $\mathcal{A}$ と一致する。)

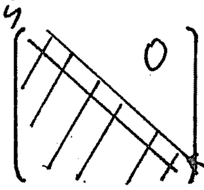
さて今, $\mathcal{L} = Q\mathcal{L}(0)Q^{-1}\,(= R\mathcal{L}(0)R^{-1})$ に対して, Q:直交, $\mathcal{L}(0)$:対称
ゆえ <u>$\mathcal{L}$ も対称行列</u>※ である。

一方 $\mathcal{L} = R\mathcal{L}(0)R^{-1}$, R:下三角 ゆえ $\mathcal{L} =$  ← 対角の1つ上

の形で ※ とあわせて, 結局

<u>$\mathcal{L}$ は 三重対角行列</u> である。

よって, $\mathcal{A}' = \frac{dR}{dt}R^{-1} + \frac{1}{2}\mathcal{L}$ に対して, 右辺第1項が (R:下三角ゆえ) 下三角行列で あるから

$\mathcal{A}' =$  の形 であり, 更に $\mathcal{A}'$:交代 であることとあわせれば

(ここは $\mathcal{L}$ の対応する line の $\frac{1}{2}$)

$$\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a_0}{2} & & 0 \\ -\frac{a_0}{2} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\frac{a_{N-1}}{2} \\ 0 & & -\frac{a_{N-1}}{2} & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{A}$$

である。

最後に,

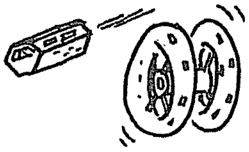
$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{dQ}{dt}\mathcal{L}(0)\,Q^{-1} - Q\,\mathcal{L}(0)\,Q^{-1}\frac{dQ}{dt}Q^{-1}$$

$$= \left[\frac{dQ}{dt}Q^{-1},\ \mathcal{L}\right]$$

$$= [\,\mathcal{A}\ ,\ \mathcal{L}\,]$$

よって <u>Lax 方程式の 解となっている。</u>

II 戸田場の方程式



この章の参考文献

[2] A.N. Leznov, M.V. Saveliev
"Exactly and completely integrable non linear dynamical systems", Acta Applicandae Mathematicae 16 (1989), 1~74

[3] A.N. Leznov, M.V. Saveliev
"A group-theoretical methods for integration of nonlinear dynamical systems" (Birkhäuser 1992)

(その他の文献は本文中に記す。)

1. 戸田場の方程式

• 独立変数 $(z,\bar z)$，未知函数 $u_i(z,\bar z)$，$\partial=\frac{\partial}{\partial z}$，$\bar\partial=\frac{\partial}{\partial\bar z}$ とする。
戸田場の方程式とは

$$\partial\bar\partial u_i + e^{u_{i+1}-u_i} - e^{u_i-u_{i-1}} = 0$$

◦注1) $(z,\bar z)$ という書き方には次のような含みがある。

① $z=\xi+i\eta$　$\bar z=\xi-i\eta$ ならば　$\partial\bar\partial = \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^2$　: Laplacian

② $z=t+x$　$\bar z=t-x$ ならば　$\partial\bar\partial = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2-\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2$　: d'Alembertian

◦注2)

今 $u_i=-q_i(z-\bar z)$ $(q_i=q_i(t))$ という形の函数に対し

$\partial\bar\partial \longrightarrow -\frac{d^2}{dt^2}$ となり 戸田格子の方程式が現われる。

• 付随する変数，τ_i，ϕ_i，v_i を次のように決める。

□ $\tau_i=\tau_i(z,\bar z)$ を次の方程式の解とする。

$$\tau_i\cdot\partial\bar\partial\tau_i - \partial\tau_i\cdot\bar\partial\tau_i + \tau_{i+1}\cdot\tau_{i-1} = 0$$

□ $e^{\phi_i}=\tau_i$ によって ϕ_i を定義すれば ϕ_i は次の方程式を満たす。

$$\partial\bar\partial\phi_i + \exp(\phi_{i+1}+\phi_{i-1}-2\phi_i) = 0$$

□ $u_i=\phi_{i+1}-\phi_i$ と定義すると，u_i は戸田場の方程式の解である。

$$\partial\bar\partial u_i + e^{u_{i+1}-u_i} - e^{u_i-u_{i-1}} = 0$$

□ $v_i = u_i - u_{i-1}$ とおけば

$$\partial\bar{\partial} v_i + e^{v_{i+1}} + e^{v_{i-1}} - 2e^{v_i} = 0$$

こうして，変数 $\tau_i \to \phi_i \to u_i \to v_i$ を導入する。

このとき，τ_i と u_i は $e^{u_i} = \dfrac{\tau_{i+1}}{\tau_i}$ でつながっている。

(以上 純然たる計算)

● 参考：root 系に付随する拡張

上記 ϕ_i の方程式をみると，$K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (A型の Cartan 行列) に対して，

$(K\phi)_i = \sum k_{ij}(-\phi_j)$ とするとき

$$\partial\bar{\partial}\phi_i + \exp(K\phi)_i = 0$$ の形であることがわかる。

他の type の Cartan 行列から出発して，同様の方程式をつくることが出来る。

詳しくは [4] O.I. Bogoyavlensky "On perturbations of the periodic Toda lattices" Commun. Math. Phys. 51 (1976), 201～209

[5] A.V. Mikhailov, M.A. Olshanetsky, A.M. Perelomov, "Two-dimensional generalized Toda lattice", Commun. Math. Phys 79 (1981), 473～488

2. Lax 形式（零曲率方程式）

● $A, \bar{A}$ $(z, \bar{z})$ 変数の $(N+1)$ 次行列値関数 に対し，

$$[\partial - A, \bar{\partial} - \bar{A}] = 0 \quad \text{つまり} \quad \bar{\partial}A - \partial\bar{A} + [A, \bar{A}] = 0$$

(最終項は行列の bracket)

の形の方程式を零曲率方程式と呼ぶ

● 注) 実際 $B = -A\,dz - \bar{A}\,d\bar{z}$ という行列値の form (接続) を考えれば

上の方程式は $dB + B \wedge B = 0$ つまりこの接続の曲率が零ということを表現している。

戸田場の方程式をこの形で書くことを考える。

● 例として $K=\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$ に付随する系では

(sl(N+1) 戸田場)
$$\begin{cases} u_0+u_1+\cdots u_N=0 \\ \partial\bar{\partial}u_0+e^{u_1-u_0}=0 \\ \partial\bar{\partial}u_i+e^{u_{i+1}-u_i}-e^{u_i-u_{i-1}}=0 \qquad i=1,\cdots,N-1 \\ \partial\bar{\partial}u_N-e^{u_N-u_{N-1}}=0 \end{cases}$$

これは非周期的な方程式 ($u_{-1}=\infty$, $u_{N+1}=-\infty$) である。周期的: $u_{N+1}=u_0$ の type では Kac-Moody Lie 環との関係があらわれる。例えば, $K=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ から出発すると, $u_1=u$, $u_0=-u$ として sinh-Gordon 方程式
$$\partial\bar{\partial}u=2\sinh(2u)$$
が出る。(確かめてみよ)

さて, ここで A. $\bar{A}$ を次で定義する。

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\partial u_0 & e^{\frac{u_1-u_0}{2}} & & & \bigcirc \\ & \frac{1}{2}\partial u_1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & e^{\frac{u_N-u_{N-1}}{2}} \\ \bigcirc & & & & \frac{1}{2}\partial u_N \end{pmatrix} \qquad \bar{A}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\bar{\partial}u_0 & & & & \bigcirc \\ e^{\frac{u_1-u_0}{2}} & -\frac{1}{2}\bar{\partial}u_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \bigcirc & & & e^{\frac{u_N-u_{N-1}}{2}} & -\frac{1}{2}\bar{\partial}u_N \end{pmatrix}$$

A, $\bar{A}$ は sl(N+1) 値であり
$$[\partial-A,\ \bar{\partial}-\bar{A}]=0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{sl(N+1) 戸田場の方程式}$$
である。(純然たる計算)

● 注) 未知函数の数が有限であるとき, τ 函数は $\tau_0=1$, $\tau_{N+1}=1$ とすることで定義される。

● さて特に, sl(2) の場合 $u_1=u$, $u_0=-u$ として, 戸田場の方程式は
$$\partial\bar{\partial}u=e^{2u}$$
となる。

これは, いわゆる Liouville の方程式である。

ここで, $u = -\log f$ によって f を定義（この f が τ函数）すると,

$$f \cdot \partial\bar{\partial} f - \partial f \cdot \bar{\partial} f + 1 = 0$$

となる。19世紀の曲面論において, この解は求められており,
一般解は $F = F(z)$, $\bar{F} = \bar{F}(\bar{z})$ を任意函数として,

$$f = \frac{1 - F(z)\bar{F}(\bar{z})}{\sqrt{F'(z)\,\bar{F}'(\bar{z})}}$$

である。（直接確かめてみよ。）

このセクションの目標は一般の $sl(N+1)$ 方程式で, 上の解に対応するものを求めることである。

$sl(N+1)$ 戸田場の解を調べる為に, まず半無限格子の場合を考察しよう。

3. 半無限格子（$sl(\frac{\infty}{2})$）から有限格子へ

参考文献 [6] A.N.Leznov, M.V Saveliev, V.G. Smirnov "General solutions of the two dimensional system of Volterra equations which realize the Bäcklund transformation for the Toda lattice" Theor. Math. Phys. 47 (1981), 417~422

- 未知函数は $u_0, u_1, \cdots\cdots$, τ函数は $\tau_0 = 1, \tau_1, \cdots$ 　（$e^{u_i} = \tau_{i+1}/\tau_i$）
方程式系は,

$$\begin{cases} \partial\bar{\partial} u_0 + e^{u_1 - u_0} = 0 \\ \partial\bar{\partial} u_i + e^{u_{i+1} - u_i} - e^{u_i - u_{i-1}} = 0 \qquad i = 1, 2, 3 \cdots \end{cases}$$

τ函数で書くと,

$$\begin{cases} \tau_1 \cdot \partial\bar{\partial} \tau_1 - \partial \tau_1 \cdot \bar{\partial} \tau_1 + \tau_2 = 0 \\ \tau_i \partial\bar{\partial} \tau_i - \partial \tau_i \cdot \bar{\partial} \tau_i + \tau_{i+1} \tau_{i-1} = 0 \qquad i = 1, 2, 3 \cdots \end{cases}$$

- この方程式系を見れば, 初期函数 τ_1（又は $u_0 = \log \tau_1$）を勝手に与えると, $\tau_2, \tau_3, \cdots$ が（$\tau_{i-1} \neq 0$ の仮定のもと）一意に決定されてしまうことがわかる。
しかも, 実は τ_i を書き下すことすら出来る。
結果は,

$$\tau_i = \det\begin{pmatrix} f & (-\bar\partial)f & \cdots & (-\bar\partial)^{i-1}f \\ \partial f & \partial(-\bar\partial)f & & \partial(-\bar\partial)^{i-1}f \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial^{i-1}f & \partial^{i-1}(-\bar\partial)f & \cdots & \partial^{i-1}(-\bar\partial)^{i-1}f \end{pmatrix}$$ ただし $f=\tau_1$。

（二方向 Wronskian による τ_i の表示）

証明は行列式に関する sylvester の定理を使えばよい。（数学辞典第3版225頁 84 F の 4）参照）

● そこで $sl(\frac{\infty}{2})$ から $sl(N+1)$ 戸田場への reduction を考える。
上記の解 τ_i に対して，付加条件 $\tau_{N+1}\equiv 1$ が満たされたとすると，
$\tau_1\cdots\tau_N$ は $sl(N+1)$ 戸田場の方程式を満たす。

問：出発点の $\tau_1=f$ をどのように選ぶと $\tau_{N+1}\equiv 1$ となるか？

（$sl(2)$ の場合，この条件がとりもなおさず，$f\cdot\partial\bar\partial f-\partial f\,\bar\partial f+1=0$ であった。）

● そこで更に次のような状況を考える。

$$f=\sum_{i=0}^{N} f_i(z)\bar f_i(\bar z) = (f_0 \cdots f_N)\begin{pmatrix}\bar f_0\\ \vdots\\ \bar f_N\end{pmatrix}$$ の形であるとする。

このとき，$$\tau_{N+1}=\det\left\{\begin{pmatrix} f_0, & \cdots & f_N \\ \partial f_0 & & \partial f_N \\ \vdots & & \vdots \\ \partial^N f_0 & \cdots & \partial^N f_N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar f_0 & (-\bar\partial)\bar f_0 & \cdots & (-\bar\partial)^N\bar f_0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \bar f_N & (-\bar\partial)\bar f_N & \cdots & (-\bar\partial)^N\bar f_N\end{pmatrix}\right\}$$

$$=W_\partial(f_0\cdots f_N)\,W_{(-\bar\partial)}(\bar f_0\cdots\bar f_N)$$

（二方向 Wronskian が一方向 Wronskian に分裂した）

よって，

$$\begin{cases} W_\partial(f_0\cdots f_N)=1 \\ W_{-\bar\partial}(\bar f_0\cdots\bar f_N)=1\end{cases}$$ となる $f_0,\cdots,f_N,\bar f_1,\ldots,\bar f_N$ を見つければよい。

• 答は以下の通り

$\theta_1, \cdots, \theta_N$ を z のみの任意関数として、

$$\begin{cases} f_0 = \dfrac{1}{\sqrt[N]{\theta_1^{N-1}\,\theta_2^{N-2}\cdots\theta_{N-1}}} \\ f_1 = f_0 \displaystyle\int_0^z dz_1\, \theta_1(z_1) \\ f_2 = f_0 \displaystyle\int_0^z dz_1 \int_0^{z_1} dz_2\, \theta_1(z_1)\,\theta_2(z_2) \\ \vdots \\ f_N = f_0 \displaystyle\int_0^z dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \cdots \int_0^{z_{N-1}} dz_N\, \theta_1(z_1)\,\theta_2(z_2)\cdots\theta_N(z_N) \end{cases}$$

同様に $\bar{\theta}_1(\bar{z}_1)\cdots\bar{\theta}_N(\bar{z}_N)$ から $\bar{f}_0\cdots\bar{f}_N$ をつくればよい。

• 次節以降で、零曲率方程式の解から、この $\theta_i, \bar{\theta}_i$ がいかに抽出されるか、ということ、そして、実際上記のものが解になっていることを検証していこう。

参考文献 [7] A.N. Leznov, M.V. Saveliev, "Representation of zero curvature for the system of non-linear partial differential equations $x_{\alpha,z\bar{z}} = \exp(kx)_\alpha$, and its integrability" Lett. Math. Phys. 3 (1979), 489~494

[8] A.N. Leznov, M.V. Saveliev, "Theory of group representations and integrability of non-linear systems $x_{\alpha,z\bar{z}} = \exp(kx)_\alpha$" , Physica 3D (1981), 62~72

• この検証のためには、方程式を零曲率の形 $[\partial - A, \bar{\partial} - \bar{A}] = 0$ で書いておくと便利である。

4. Gauss分解による data $\theta_1, .., \theta_N, \bar{\theta}_1, .., \bar{\theta}_N$ の抽出

• $A, \bar{A}$ が $[\partial - A, \bar{\partial} - \bar{A}] = 0$ を満たしているとき、上記の $\theta_1\cdots\theta_N\ \bar{\theta}_1\cdots\bar{\theta}_N$ はいかに抽出されるだろうか?

• Gauss分解とは?

g: 正方行列 は generic に 次のように分解される。

$$g = MN = \bar{M}\bar{N}$$ ここで Mは下三角行列, Nは対角成分が全て1の上三角行列
$\bar{M}$は上三角行列, $\bar{N}$は対角成分が全て1の下三角行列

この分解は各々一意的であり, これを Gauss分解 という。

□ $\theta_1 \cdots \theta_N$, $\bar{\theta}_1 \cdots \bar{\theta}_N$ の抽出

① $A, \bar{A}$: $sl(N+1)$ 値函数が $[\partial - A, \bar{\partial} - \bar{A}] = 0$ を満たすとする。
このとき, ある $g = g(z, \bar{z})$: $SL(N+1)$ 値函数 で,

$$g(0,0) = I \quad , (\partial - A) g = 0 \quad (\bar{\partial} - \bar{A}) g = 0$$

を満たすものが局所的に一意に存在する。(g は戸田格子での $\mho$ に対応する。)

∵) 実際 $\partial g = Ag$, $\bar{\partial} g = \bar{A} g$ の両立条件 (Frobenius条件) は,
$A, \bar{A}$ の零曲率方程式に他ならない。
よって初期値を決めれば, local な解の一意的存在が保証される。
更に
$d(\det g) = tr(g^{-1} dg)(\det g)$ であり,

$$g^{-1} dg = g^{-1}(\partial g dz + \bar{\partial} g d\bar{z}) = g^{-1}(Ag dz + \bar{A} g d\bar{z})$$
$$= g^{-1}(A dz + \bar{A} d\bar{z}) g$$ だから.

最終辺の trace は 0 ($A, \bar{A}$ は $sl(N+1)$ 値).
結局 $d(\det g) = 0$ だから $\det g$ は定数, $g(0,0) = I$ ゆえ
g は $SL(N+1)$ 値 //

参考) 接続の言葉でいえば, 主 $SL(N+1)$ 束の曲率零な接続に対して, 自明化 (g) を与えたことになる。

② 上の g を 2通りに Gauss 分解する。

$$g = MN \qquad M = \begin{pmatrix} * & & & 0 \\ * & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ * & & & * \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & & & * \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \bar{M}\bar{N} \qquad \bar{M} = \begin{pmatrix} * & & & * \\ & * & \ddots & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & * \end{pmatrix} \qquad \bar{N} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \\ * & & & 1 \end{pmatrix}$$

- Natation

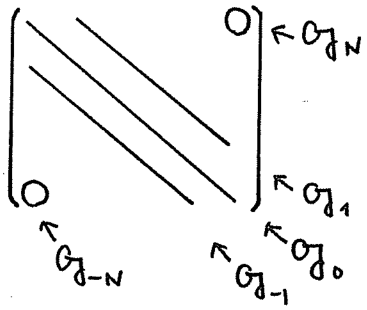
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(N+1) = \bigoplus_{i=-N}^{N} \mathfrak{g}_i \quad \text{grading を}$$

$$\mathfrak{g}_i \overset{def}{\Longleftarrow} \{ (a_{jk}) \mid k-j=i \text{ となる } a_{kj} \text{ 以外は全て } 0 \}$$

で定義する。又,

$$\mathfrak{g}_{\le 0} \overset{def}{\Longleftarrow} \bigoplus_{i=-N}^{0} \mathfrak{g}_i \ , \quad \mathfrak{g}_{\ge 0} \overset{def}{\Longleftarrow} \bigoplus_{i=0}^{N} \mathfrak{g}_i \ , \quad \mathfrak{g}_{<0} \overset{def}{\Longleftarrow} \bigoplus_{i=-N}^{-1} \mathfrak{g}_i \ , \quad \mathfrak{g}_{>0} \overset{def}{\Longleftarrow} \bigoplus_{i=1}^{N} \mathfrak{g}_i$$

と定義する。



このとき, $M \in \exp \mathfrak{g}_{\le 0}$, $N \in \exp \mathfrak{g}_{>0}$, $\bar{M} \in \exp \mathfrak{g}_{\ge 0}$, $\bar{N} \in \exp \mathfrak{g}_{<0}$.

③ N は z のみの函数, $\bar{N}$ は $\bar{z}$ のみの函数であり, かつ

$\partial N \cdot N^{-1} \in \mathfrak{g}_1$, $\bar{\partial} \bar{N} \cdot \bar{N}^{-1} \in \mathfrak{g}_{-1}$ である。

$$\partial N \cdot N^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \theta_1(z) & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \theta_N(z) \\ & & & 0 \end{pmatrix} \qquad \bar{\partial} \bar{N} \cdot \bar{N}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \bar{\theta}_1(\bar{z}) & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \bar{\theta}_1(\bar{z}) & 0 \end{pmatrix} \quad \text{と書く.}$$

(証明)

$$A = \partial g \cdot g^{-1} = \partial(\bar{M}\bar{N})(\bar{M}\bar{N})^{-1} = \partial \bar{M} \cdot \bar{M}^{-1} + \bar{M}\, \partial \bar{N} \cdot \bar{N}^{-1} \bar{M}^{-1}$$

であるが $A \in \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ (定義をみよ) $\partial \bar{M} \cdot \bar{M}^{-1} \in \mathfrak{g}_{\ge 0}$ ゆえ

$\bar{M}\, \partial \bar{N}\, \bar{N}^{-1} \bar{M}^{-1} \in \mathfrak{g}_{\ge 0}$ である。 ところが今 $\bar{M}$ は上三角行列なので, $\partial \bar{N}\, \bar{N}^{-1} \in \mathfrak{g}_{\ge 0}$

$\partial N \cdot \bar{N}^{-1} \in \mathfrak{g}_{\ge 0}$ でなければならない。一方 $\partial \bar{N} \cdot \bar{N}^{-1} \in \mathfrak{g}_{<0}$ であるから

結局 $\partial \bar{N} \cdot \bar{N}^{-1} = 0$ よって $\partial \bar{N} = 0$ つまり $\bar{N}$ は z によらない。

● 同様に $\bar{A} = \bar{\partial}g \cdot g^{-1}$ であり $g = M \cdot N$ であることから $\bar{\partial}N = 0$ Nは $\bar{z}$ によらないこともわかる。

● 次に、$A = \partial g \cdot g^{-1}$ に今度は $g = M \cdot N$ を代入すると

$$A = \partial M \cdot M^{-1} + M \, \partial N \cdot N^{-1} M^{-1}$$

よって

$$\partial N \cdot N^{-1} = M^{-1} A M - M^{-1} \partial M$$

(右辺第1項) $\in \mathfrak{g}_{\leq 1}$ (MとAの形より) (第2項) $\in \mathfrak{g}_{\leq 0}$ なので

$\partial N N^{-1} \in \mathfrak{g}_{\leq 1}$ だが、そもそも $\partial N \cdot N^{-1} \in \mathfrak{g}_{\geq 1}$ ゆえ、$\partial N \cdot N^{-1} \in \mathfrak{g}_{1}$

● 同様に $\bar{A} = \bar{\partial}g \cdot g^{-1}$ に $g = \bar{M} \cdot \bar{N}$ を代入して、$\bar{\partial}\bar{N}\bar{N}^{-1} \in \mathfrak{g}_{-1}$ を知る。

▨

④ こうして、$A, \bar{A}$ から出発して $\Theta_1, \ldots, \Theta_N$, $\bar{\Theta}_1, \ldots, \bar{\Theta}_N$ が抽出できることがわかった。

次節では逆に $\Theta_1, \ldots, \Theta_N, \bar{\Theta}_1 \cdots \bar{\Theta}_N$ を任意に与えて、$sl(N+1)$ 戸田場の方程式の解をつくる。以上の議論は、それが $sl(N+1)$ 戸田場の方程式の一般解であることを保証している。

5. 逆構成ー一般解を求める。

$\theta_1(z)\cdots\theta_N(z)$, $\bar\theta_1(\bar z)\cdots,\bar\theta_N(\bar z)$ $(\theta_i,\bar\theta_i\neq 0)$ を任意に与える。

① $L \overset{def}{=\!=} \begin{pmatrix} 0 & \theta_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \theta_N \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ $\bar L \overset{def}{=\!=} \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \bar\theta_1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \bar\theta_N & 0 \end{pmatrix}$ に対して

$\partial N\cdot N^{-1}=L$, $\bar\partial\bar N\cdot\bar N^{-1}=\bar L$ (これは常微分方程式) を解く.

答は

$$N=1+\int_0^z dz_1 L(z_1)+\int_0^z dz_1\int_0^{z_1}dz_2 L(z_1)L(z_2)+\cdots\cdots+\int_0^z dz_1\cdots\int_0^{z_{N-1}}dz_N L(z_1)\cdots L(z_N).$$

(有限項で切れてしまう。Kac-Moody が関係してくると無限項になる)

又.

$$\bar N^{-1}=1-\int_0^{\bar z}d\bar z_1\bar L(\bar z_1)+\int_0^{\bar z}d\bar z_1\int_0^{\bar z_1}d\bar z_2\bar L(\bar z_2)\bar L(\bar z_1)-\cdots\cdots$$

($\bar\partial(\bar N\bar N^{-1})=0$ より $\bar\partial\bar N\bar N^{-1}=-\bar N\bar\partial\bar N^{-1}$ よって $\bar N^{-1}$ は $\bar\partial\bar N^{-1}=-\bar N^{-1}\bar L$ の解である)

② 先節で $g=MN=\bar M\bar N$ だったことを思い出して. $K\overset{def}{=\!=}N\bar N^{-1}$ を Gauss 分解する。

$$K=M^{-1}\bar M \quad ここで\ M=\begin{pmatrix}1 & 0\\ * & 1\end{pmatrix}=(m_{ij}),\ \bar M=\begin{pmatrix}* & *\\ 0 & *\end{pmatrix}=(\bar m_{ij})$$

- M の対角成分を 1 としたことで, 前節の $M,\bar M$ とは異なっていることに注意せよ。
  この点はあとで, ゲージ変換により調節を行う。(後述)

③ m_{ij}, $\bar m_{ij}$ は K の小行列式の比で書くことができる。

たとえば

$$m_{i,i-1}=-\frac{K_{\{0,\cdots i-2,i\}\{0,\cdots i-1\}}}{K_{\{0\cdots i-1\}\{0\cdots i-1\}}}\qquad ここで.\ K_{IJ}=\det(K_{ij})_{\substack{i\in I\\ j\in J}}$$

- - - - - - -

$$\bar m_{ii}=\frac{K_{\{0,\cdots,i-1,i\}\{0,\cdots,i-1,i\}}}{K_{\{0\cdots i-1\}\{0,\cdots,i-1\}}}$$

演習: これを示せ
(ヒント: $K=(k_{ij})$ given, $M=(m_{ij})=\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ * & & 1\end{pmatrix}$ に対する方程式(線形!)

$(MK)_{ij}=0$ $(i>j)$をとけば. $MK=\begin{pmatrix}* & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & *\end{pmatrix}$ ゆえ Gauss分解を得る)

④ $g \overset{\mathrm{def}}{=} MN=\bar{M}\bar{N}$, $C \overset{\mathrm{def}}{=} \partial g g^{-1}$ $\bar{C}=\bar{\partial}gg^{-1}$ とおく。

このとき

$[\partial-C, \bar{\partial}-\bar{C}]=0$ である。(定義に従って計算するだけ)

- $C, \bar{C}$ の形を決定しよう。

$C=\partial g\cdot g^{-1}=\partial(MN)\cdot(MN)^{-1}=\partial M\cdot M^{-1}+M\partial N\cdot N^{-1}M^{-1}$

一方 $=\partial(\bar{M}\bar{N})(\bar{M}\bar{N})^{-1}=\partial\bar{M}\cdot\bar{M}^{-1}$ ($\bar{N}$は zによらないことに注意)

今 $\partial M\cdot M^{-1}\in\mathfrak{g}_{\leq -1}$, $\partial N\cdot N^{-1}\in\mathfrak{g}_1$ ゆえ

$\partial M\cdot M^{-1}+M\partial N\cdot N^{-1}M^{-1}\in\mathfrak{g}_{\leq 1}$

一方 $\partial\bar{M}\cdot\bar{M}^{-1}\in\mathfrak{g}_{\geq 0}$ なので $\underline{C\in\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_1}$ である。

又. $C=\partial\bar{M}\cdot\bar{M}^{-1}$ より $C=\begin{bmatrix}\partial\log\bar{m}_{00} & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & \partial\log\bar{m}_{NN}\end{bmatrix}$ という形で

一方 $C=(\partial MM^{-1}+M\partial N\cdot N^{-1}\cdot M^{-1})_{\geq 0}$

$=(M\cdot L\cdot M^{-1})_{\geq 0}$ (Nは $\partial N\cdot N^{-1}=L$の解!)

$M=\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ * & & 1\end{pmatrix}$ $M^{-1}=\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ * & & 1\end{pmatrix}$ ゆえ

$MLM^{-1}=\begin{pmatrix}* & \theta_1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \theta_N\\ * & & & *\end{pmatrix}$ Cはこの上三角成分.

全く同様に $\bar{C}=\bar{\partial}g\cdot g^{-1}=\bar{\partial}M\cdot M^{-1}=\bar{\partial}\bar{M}\bar{M}^{-1}+\bar{M}\bar{\partial}\bar{N}\cdot\bar{N}^{-1}\bar{M}^{-1}$ より出発して,

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} \overline{m}_{00} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{m}_{NN} \end{pmatrix} \quad \overline{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \overline{m}_{00}^{-1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{m}_{NN}^{-1} \end{pmatrix}$$
を使い $\overline{C}$ の形が決まる。

$$C = \begin{bmatrix} \partial \log \overline{m}_{00} & \theta_1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \theta_N \\ 0 & & & \partial \log \overline{m}_{NN} \end{bmatrix} \quad \overline{C} = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ \overline{m}_{11}\overline{\theta}_1 / \overline{m}_{00} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \overline{m}_{NN}\overline{\theta}_N / \overline{m}_{N-1\,N-1} & 0 \end{bmatrix}$$

となる。しかし、まだこれは2節の $A, \overline{A}$ の形をしていない。

⑤ gauge 変換を行う。

$C, \overline{C}$ が零曲率方程式 $[\partial - C, \overline{\partial} - \overline{C}] = 0$ を満たしているとき、

h 正方行列によって $\begin{cases} C' = h^{-1} C h - h^{-1} \partial h \\ \overline{C}' = h^{-1} \overline{C} h - h^{-1} \overline{\partial} h \end{cases}$

という変換を行っても

$$[\partial - C', \overline{\partial} - \overline{C}'] = h^{-1} [\partial - C, \overline{\partial} - \overline{C}] h = 0$$

である。

特に、h が対角かつ SL 値であるとき、これを <u>gauge 変換</u>という。

このとき、$C \in \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, $\overline{C} \in \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \longrightarrow C' \in \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, $\overline{C}' \in \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0$ である。
つまり h は grading を変えないことに注意する。

- そこでまず戸田場の方程式を与える $A, \overline{A}$ を $h = \mathrm{diag}(e^{-\frac{u_0}{2}} \cdots e^{-\frac{u_N}{2}})$ で gauge 変換する。変換された結果を $B, \overline{B}$ とすると

$$B = \begin{bmatrix} \partial u_0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \partial u_N \end{bmatrix} \quad \overline{B} = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ e^{u_1 - u_0} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & e^{u_N - u_{N-1}} & 0 \end{bmatrix}$$

$B = h^{-1} A h - h^{-1} \partial h$
$\overline{B} = h^{-1} \overline{A} h - h^{-1} \overline{\partial} h$

よって $C, \bar{C}$ から $B, \bar{B}$ gauge に移ることが出来ればよい。

⑥ gauge 変換の存在.

$h = \mathrm{diag}(h_0 \cdots h_N)$ を見つけ $\begin{cases} B = h^{-1}Ch - h^{-1}\partial h \\ \bar{B} = h^{-1}\bar{C}h - h^{-1}\bar{\partial} h \end{cases}$

としたい。
右辺を計算すると

$$1)\ h^{-1}Ch - h^{-1}\partial h = \begin{pmatrix} \partial\log\bar{m}_{00} - \partial\log h_0 & h_1\theta_1/h_0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & h_N\theta_N/h_{N-1} \\ 0 & & & \partial\log\bar{m}_{NN} - \partial\log h_N \end{pmatrix}$$

$$2)\ h^{-1}\bar{C}h - h^{-1}\bar{\partial} h = \begin{pmatrix} \bar{\partial}\log h_0 & & & 0 \\ \frac{\bar{m}_{11}}{\bar{m}_{00}}\bar{\theta}_1\frac{h_0}{h_1} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \frac{\bar{m}_{NN}}{\bar{m}_{N-1,N-1}}\bar{\theta}_N\frac{h_{N-1}}{h_N} & \bar{\partial}\log h_N \end{pmatrix}$$

1) 式が B と一致するためには $\underline{\dfrac{h_i\theta_i}{h_{i-1}} = 1}$ ① でなければならない。

一方 $h_0 \cdots h_N = 1$ より

$$(9a)\ \begin{cases} h_0 = \sqrt[N]{\theta_1^{N-1}\cdots\theta_{N-1}} \\ h_i = \dfrac{h_0}{\theta_1\theta_2\cdots\theta_i} \end{cases}$$

であることが直ちにわかる。
よって特に $h_i = h_i(z)$ であり. $\underline{\text{2) 式の対角成分も全て } 0}$ ロ になる。($\bar{B}$ の対角と一致)

ここで $\bar{\theta}_1 \cdots \bar{\theta}_N$ から $\bar{h}_1 \cdots \bar{h}_N$ を上と同様の手続で定める。
（つまり $\dfrac{\bar{h}_i \bar{\theta}_i}{\bar{h}_{i-1}} = 1$ によって定める）

ここで $e^{u_i} \overset{\text{def}}{\Longleftarrow} \dfrac{\bar{m}_{ii}}{h_i \bar{h}_i}$ とおくと、

$$\underline{e^{u_i - u_{i-1}}} = \frac{\bar{m}_{ii}}{h_i \bar{h}_i} \cdot \frac{h_{i-1} \bar{h}_{i-1}}{\bar{m}_{i-1\,i-1}} = \frac{\bar{m}_{ii}}{\bar{m}_{i-1\,i-1}} \frac{\bar{h}_{i-1}}{\bar{h}_i} \frac{h_{i-1}}{h_i}$$

$$= \frac{\bar{m}_{ii}}{\bar{m}_{i-1\,i-1}} \bar{\theta}_i \frac{h_{i-1}}{h_i} = \text{2) 式の } (i, i-1) \text{ 成分} \quad \text{(ハ)}$$

更に、このとき、

$$\underline{\partial \log \bar{m}_{ii} - \partial \log h_i} = \partial \log \frac{\bar{m}_{ii}}{h_i} \qquad \bar{h}_i \text{ は } \bar{z} \text{ にしかよらぬゆえ}$$

$$= \partial \log \frac{\bar{m}_{ii}}{h_i \bar{h}_i} = \underline{\partial u_i} \quad \text{(ニ)}$$

以上 (イ), (ロ), (ハ), (ニ) より (g_a) できまる gauge 変換によって、C, $\bar{C}$ が B, $\bar{B}$ に移されることがわかった。■

⑦ τ 函数の決定.

$e^{u_i} = \dfrac{\tau_{i+1}}{\tau_i}$ によって τ 函数を決めるのであったが今の場合

$$e^{u_i} = \frac{\bar{m}_{ii}}{h_i \bar{h}_i}, \quad \bar{m}_{ii} = \frac{K_{\{0,\cdots,i-1,i\}\{0,\cdots,i-1,i\}}}{K_{\{0\cdots i-1\}\{0\cdots i-1\}}}$$

$$\left.\begin{aligned} h_i &= \frac{h_0 \cdots h_i}{h_0 \cdots h_{i-1}} \\ \bar{h}_i &= \frac{\bar{h}_0 \cdots \bar{h}_i}{\bar{h}_0 \cdots \bar{h}_{i-1}} \end{aligned}\right\} \leftarrow \text{あたり前の恒等式}$$

より

$$\tau_i = \frac{K_{\{0\cdots i-1\}\{0\cdots i-1\}}}{h_0 \cdots h_{i-1} \bar{h}_0 \cdots \bar{h}_{i-1}} \quad \text{であることがわかる。}$$

● これは実際3節で示したものに他ならない。
たとえば
$$\tau_1 = \frac{K_{\vec{0}\vec{0}}}{h_0 \overline{h_0}} = \frac{K_{00}}{h_0 \overline{h_0}}$$ であり $K = N\overline{N}^{-1}$ ゆえ
$$= \sum_{i=0}^{N} \frac{N_{0i}}{h_0} \frac{(\overline{N}^{-1})_{i0}}{\overline{h_0}}$$

一方 ① の N の定義
$$N = 1 + \int_0^z dz_1 L(z_1) + \int_0^z dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 L(z_1) L(z_2) + \cdots + \int_0^z dz_1 \cdots \int_0^{z_{n-1}} dz_n L(z_1) \cdots L(z_n)$$
より
$$N_{00} = 1 \quad N_{01} = \int_0^z dz_1\, \theta_1(z_1), \ \ldots \quad N_{0N} = \int_0^z dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \cdots \int_0^{z_{N-1}} dz_N\, \theta_1(z_1)\, \theta_2(z_2) \cdots \theta_N(z_N)$$
又
$$h_0 = \sqrt[N]{\theta_1^{N-1} \cdots\cdots \theta_{N-1}}$$ ゆえ $$\frac{N_{0i}}{h_0} = (3\text{節の } f_i)$$

$\overline{N}^{-1}$ についても同様であり
$$\tau_1 = \sum_{i=0}^{N} f_i(z)\, \overline{f}_i(\overline{z})$$ である。

6. 補足 — Wess-Zumino-Witten 模型との関係

● 4節, 5節の議論により,
$$(A, \overline{A}) \underset{5\text{節}}{\overset{4\text{節}}{\rightleftarrows}} (N, \overline{N})$$
という対応ができた。この対応の左側は $sl(N+1)$ 戸田場の方程式であるが, 右側は, どのような場の方程式にあたるだろうか? ひとつの考え方は, $SL(N+1)$ 値函数
$$K = N\overline{N}^{-1}$$
を方程式
$$\partial(K^{-1} \cdot \overline{\partial} K) = 0 \quad (\Leftrightarrow \ \overline{\partial}(\partial K \cdot K^{-1}) = 0)$$
の解と理解することである。これは Wess-Zumino-Witten 模型と呼ばれるものに他ならない。(正確には Euler-Lagrange 方程式, つまり量子化以前の場の方程式である。)
ただし, もともとの Wess-Zumino-Witten 模型では $N, \overline{N}$ は (それぞれ, $z, \overline{z}$ のみの函数であることを除けば) 任意の $SL(N+1)$ 値函数であるが, 今の場合には, 拘束

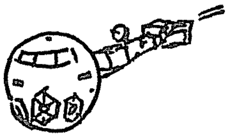
条件

$$\partial N \cdot N^{-1} \in \mathfrak{g}_1 \quad , \quad \bar{\partial} \bar{N} \cdot \bar{N}^{-1} \in \mathfrak{g}_{-1}$$

が付いている。

つまり $sl(N+1)$ 戸田場の方程式は『拘束条件付き $SL(N+1)$ Wess-Zumino-Witten 模型』とみなせることになる。

III 戸田 Hierarchy



この章の参考文献

[9] K. Ueno, K. Takesaki
"Toda lattice hierarchy", Adv. Stud. Pure. Math. 4
(North Holland / 紀伊国屋)

[10] K. Takesaki
"Initial value problem for the Toda lattice hierarchy"
(i.b.i.d.)

[11] T. Takebe
"Toda hierarchy and conservation law" Commun. Math. Phys. 129 (1990)

[12] T. Takebe
"Representation theoretical meaning of the initial value problem for the Toda lattice hierarchy, I" Lett. Math. Phys. 21 (1991) 77~84;

[13] " 同, II" Publ. RIMS, Kyoto Univ., 27 (1991) 491~503

1. 零曲率方程式系としての定式化

・Motivation, 戸田格子と戸田場の融合, K.P. hierarchy に相等するものを戸田場で行うこと.

・定義（同値な定義のうちの一つ）
戸田(格子)ヒエラルキーは次の無限個の零曲率方程式系によって定式化される。

$$
\begin{cases}
[\partial_n - B_n, \partial_m - B_m] = 0 \\
[\bar{\partial}_n - \bar{B}_n, \bar{\partial}_m - \bar{B}_m] = 0 \\
[\partial_n - B_n, \bar{\partial}_m - \bar{B}_m] = 0
\end{cases}
\qquad n, m = 1, 2, 3 \cdots
$$

ここで, $\partial_n = \dfrac{\partial}{\partial z_n}$, $\bar{\partial}_n = \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_n}$ $\quad n = 1, 2, \ldots$

$$B_n = (L^n)_{\geq 0}, \quad \bar{B}_n = (\bar{L}^n)_{\leq -1}$$ であり,

$L,\bar{L}$ は $\mathfrak{gl}(\infty)$（無限次行列）値の $(z,\bar{z})=(z_1,z_2\cdots,\bar{z}_1,\bar{z}_2\cdots)$ 変数の函数で、

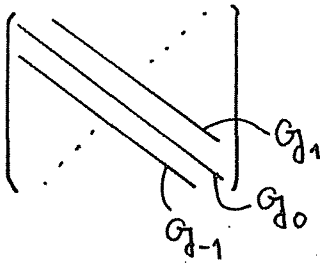
$$L=\begin{pmatrix}\ddots & \ddots & & & & 0\\ & * & 1 & & & \\ & & * & 1 & & \\ & & & * & 1 & \\ & & & & * & \ddots\\ & * & & & & \ddots\end{pmatrix}\qquad \bar{L}=\begin{pmatrix}\ddots & & & & & *\\ \ddots & * & & & & \\ & * & * & & & \\ & & * & * & & \\ & & & * & * & \\ 0 & & & & \ddots & \ddots\end{pmatrix}$$

この成分は全て $\neq 0$

という形。

・定義についての注意

• $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(\infty)$ の grading を



で与える。 $\mathfrak{g}=\bigoplus_{n=-\infty}^{\infty}\mathfrak{g}_n$

このとき、$L\in\bigoplus_{n=-\infty}^{1}\mathfrak{g}_n$, $\bar{L}\in\bigoplus_{n=-1}^{\infty}\mathfrak{g}_n$ で、$L^n,\bar{L}^n$ の各項は有限和である。

又、$A\in\mathfrak{gl}(\infty)$ に対し、
$$\begin{cases}(A)_{\geq 0}=\mathrm{Proj}_{\bigoplus_{n\geq 0}\mathfrak{g}_n}(A)\\ (A)_{\leq -1}=\mathrm{Proj}_{\bigoplus_{n=-\infty}^{-1}\mathfrak{g}_n}(A)\end{cases}$$
で、

特に

$$B_n=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1\end{pmatrix}\in\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_n,\quad \bar{B}_n=\begin{pmatrix}0 & & & 0\\ 1 & 0 & & \\ 1 & 1 & 0 & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots\end{pmatrix}\in\mathfrak{g}_{-n}\oplus\mathfrak{g}_{-n+1}\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_{-1}$$

• たとえば

$$B_1=\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} & \overset{0}{\vee} & \overset{1}{\vee} & \end{matrix}\\
\begin{matrix} \\ 0> \\ 1> \end{matrix} & \begin{pmatrix}\ddots & 1 & & 0\\ & b(0) & 1 & \\ 0 & & b(1) & \ddots\end{pmatrix}
\end{array}
\qquad
\bar{B}_1=\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix}\cdots & \overset{-1}{\vee} & \overset{0}{\vee} & \cdots\end{matrix}\\
\begin{matrix}\vdots \\ 0> \\ 1> \\ \vdots\end{matrix} & \begin{pmatrix}\ddots & \ddots & & 0\\ & a(-1) & 0 & \\ & & a(0) & 0\\ 0 & & & \ddots\end{pmatrix}
\end{array}$$

$b(s) = b(s, z, \bar{z})$, $a(s) = a(s, z, \bar{z})$ で，
方程式
$$[\partial_1 - B_1 , \bar{\partial}_1 - \bar{B}_1] = 0$$ は

$$\begin{cases} \partial_1 a(s) = a(s)\left(b(s+1) - b(s)\right) \\ \bar{\partial}_1 b(s) + a(s) - a(s-1) = 0 \end{cases}$$ と同値で， $$\begin{cases} a(s) = e^{u(s+1)-u(s)} \\ b(s) = \partial_1 u(s) \end{cases}$$

とおけば，

$$\underline{\partial_1 \bar{\partial}_1 u(s) + e^{u(s+1)-u(s)} - e^{u(s)-u(s-1)} = 0}$$ となる。

これは2次元戸田場方程式の成分無限箇のものとなっている。

2. 差分Operatorとしての表示

・無限次の行列は差分作用素だと思うことができる。

・$gl(\infty) \ni A = (a_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ の index を次のようにつけかえる。

$$a_{ij} \longrightarrow a_{j-i}(i)$$

すなわち $(j-i)$ が grading の index を，i が行の index を表わすわけである。

$$A = \begin{array}{cc} & j \\ i & \left[\begin{array}{c} \cdots\cdots a_{j-i}(i) \\ \\ \end{array}\right] \end{array} = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ \ddots & a_0(-1) & & \\ & a_{-1}(0) & a_0(0) & \\ & & a_{-1}(1) & a_0(1) \\ & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

このとき，Aは差分Operator

$$A = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m(s)\, e^{m\partial_s}$$ とみなせる。

ここで $e^{m\partial_s}$ は $s \longmapsto s+m$ という operator

すなわち

$$\mathbb{f} = \begin{pmatrix} \vdots \\ f(-1) \\ f(0) \\ f(1) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{に対して、} \quad A\mathbb{f} = \begin{pmatrix} \vdots \\ Af(-1) \\ Af(0) \\ Af(1) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad Af(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(s) f(s+n)$$

• この同一視によると、$L, \bar{L}$ は

$$L = e^{\partial_s} + \sum_{n=-\infty}^{0} u_n(s) e^{n\partial_s}, \quad \bar{L} = \sum_{n=-1}^{\infty} \bar{u}_n(s) e^{n\partial_s}$$

又、

$$B_1 = e^{\partial_s} + u_0(s), \quad \bar{B}_1 = \bar{u}_{-1}(s) e^{-\partial_s}$$

(前節の notation では $b(s) = u_0(s)$, $a(s-1) = \bar{u}_{-1}(s)$)

• この記法によると、たとえば、

$$\begin{aligned}(B_1\bar{B}_1 f)(s) &= (e^{\partial_s}\bar{B}_1 f)(s) + (u_0(s)\bar{B}_1 f)(s) = (\bar{B}_1 f)(s+1) + u_0(s)(\bar{B}_1 f)(s) \\ &= \bar{u}_{-1}(s+1) f(s+1-1) + u_0(s)\bar{u}_{-1}(s) f(s-1) \\ &= \left[\left(\bar{u}_{-1}(s+1) + u_0(s)\bar{u}_{-1}(s) e^{-\partial_s}\right) f\right](s)\end{aligned}$$

よって

$$[\partial_1 - B_1, \bar{\partial}_1 - \bar{B}_1] = \bar{\partial}_1 B_1 - \partial_1 \bar{B}_1 + (\bar{u}_{-1}(s+1) - \bar{u}_{-1}(s)) + (u_0(s)\bar{u}_{-1}(s) - u_0(s-1)\bar{u}_{-1}(s)) e^{-\partial_s}$$

ここで右辺$=0$として、$1 = e^{0\cdot\partial_s}$, $e^{-\partial_s}$ の係数をくらべて、前節末の方程式(2次元戸田場)を得る。

• Lax方程式系による定式化

$L, \bar{L}, B_n, \bar{B}_n$ は先節と同じものとする。次のLax方程式系

$$\begin{cases} \partial_m L = [B_m, L], & \bar{\partial}_m L = [\bar{B}_n, L] \\ \partial_m \bar{L} = [B_m, \bar{L}], & \bar{\partial}_m \bar{L} = [\bar{B}_m, L] \end{cases} \qquad m = 1, 2, \cdots$$

は零曲率方程式系と同値である。(証明は [9] 参照)

3. 付随する変数

II章における $\mathfrak{g}$ に対応する行列 (operator) と τ 函数を導入する。

- Toda hierarchy の下で $\exists\, W, \overline{W} \in gl(\infty)$

$$
\begin{cases}
W = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} w_n(s)\, e^{-n\partial_s} \sim \begin{pmatrix} \ddots & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ * & & & 1 \ddots \end{pmatrix} \\[2em]
\overline{W} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \overline{w}_n(s)\, e^{n\partial_s} \sim \begin{pmatrix} \ddots & & & * \\ & * & & \\ & & * & \\ 0 & & & * \ddots \end{pmatrix}
\end{cases}
$$

such that

$$
① \begin{cases}
L = W \circ e^{\partial_s} \circ W^{-1} \\
\overline{L} = \overline{W} \circ e^{-\partial_s} \circ \overline{W}^{-1}
\end{cases}
$$

かつ

$$
② \begin{cases}
\partial_n W = B_n W - W e^{n\partial_s} \\
\partial_n \overline{W} = B_n \overline{W} \\
\overline{\partial}_n W = \overline{B}_n W \\
\overline{\partial}_n \overline{W} = \overline{B}_n \overline{W} - \overline{W} e^{-n\partial_s}
\end{cases}
$$

$$
e^{n\partial_s} = \begin{pmatrix} & \overset{g_n}{\searrow}\ \ddots 1 & & 0 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}
$$

$$
e^{-n\partial_s} = \begin{pmatrix} \ddots & & & 0 \\ 1 & & & \\ & 1 & & \\ 0 & & 1 & \ddots \nwarrow g_{-n} \end{pmatrix}
$$

- さらに $\exists\, \tau(s) = \tau(s, z, \overline{z})$

such that

$$
\begin{cases}
1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} w_n(s)\, \lambda^{-n} = \dfrac{\tau(s, z - \varepsilon(\lambda^{-1}), \overline{z})}{\tau(s, z, \overline{z})} \\[2em]
\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \overline{w}_n(s)\, \lambda^{n} = \dfrac{\tau(s+1, z, \overline{z} - \varepsilon(\lambda))}{\tau(s, z, \overline{z})}
\end{cases}
$$

ここで $\varepsilon(\lambda^{\pm 1}) = \left(\lambda^{\pm 1}, \frac{1}{2}\lambda^{\pm 2}, \frac{1}{3}\lambda^{\pm 3}, \dots\right)$

つまりたとえば $\overline{z} - \varepsilon(\lambda) = \left(\overline{z}_1 - \lambda,\ \overline{z}_2 - \frac{\lambda^2}{2},\ \overline{z}_3 - \frac{\lambda^3}{3}, \dots\right)$。

差分 operator の記法をつかえば

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} w_n(s)\lambda^{-n} = \frac{e^{-\sum \frac{\lambda^{-n}}{n}\partial_n}\tau(s)}{\tau(s)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \overline{w}_n(s)\lambda^{n} = \frac{e^{-\sum \frac{\lambda^{n}}{n}\overline{\partial}_n}\tau(s+1)}{\tau(s)}$$

- 次のような見方もできる。

今 $t=(t_1, t_2, \cdots)$ の多項式 $P_m(t)$ $m=0,1,2\cdots$ を

$$\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} t_m\lambda^m\right) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(t)\lambda^m$$ で定義する。

すると例えば、$P_0=1$, $P_1(t)=t_1$, $P_2(t)=t_2+\frac{1}{2}t_1^2$, $P_3(t)=t_3+t_1t_2+\frac{1}{6}t_1^3\cdots$

(これは Schur 函数の特殊な場合にあたる。)

となる。そこで $\partial=(\partial_1, \frac{1}{2}\partial_2, \frac{1}{3}\partial_3, \cdots)$ $\overline{\partial}=(\overline{\partial}_1, \frac{1}{2}\overline{\partial}_2, \frac{1}{3}\overline{\partial}_3, \cdots)$

とすると、

$$w_n(s) = \frac{P_n(-\partial)\tau(s)}{\tau(s)} \qquad \overline{w}_n(s) = \frac{P_n(-\overline{\partial})\tau(s+1)}{\tau(s)}$$

- この W. $\overline{W}$ 及び τ の存在は [9] を参照のこと.

4. 変数のまとめと今後の方針

・3節で導入された変数と、その不定性をまとめておく。

$\tau(\lambda)$ ———————— $\log\tau$ の発展方程式系
(この係数は $w_n, \bar{w}_n$ の微分多項式)

$\downarrow$ ここには $\tau(\lambda) \longmapsto c\,\tau(\lambda)$ (c:定数) という不定性がある。 $\uparrow$

$(W, \bar{W})$ ———————— $(W, \bar{W})$ の発展方程式系
(この係数は $(u_n, \bar{u}_n)$ の微分多項式)

$\downarrow$ ここの不定性は $\uparrow$

$$\begin{cases} W \longmapsto W\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n\partial_\lambda}\right) \\ \bar{W} \longmapsto \bar{W}\left(\bar{c}_0+\sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_n e^{n\partial_\lambda}\right) \end{cases}$$

$c_n, \bar{c}_n$ は定数, $\bar{c}_0 \neq 0$

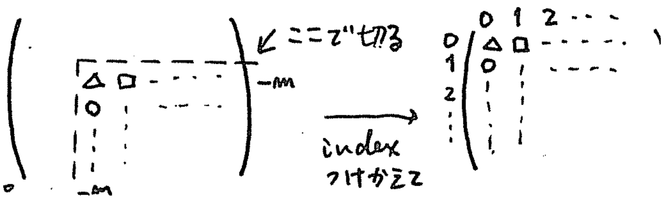
$(L, \bar{L})$ ———————— 零曲率方程式系 $\underset{\text{同値}}{\cong}$ Lax方程式系

・本質は τ関数のレベルで見えてくる。

・以後, <u>この方程式の一般解を構成する。</u> ← これが目標

手続きは

① $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq -m}$ 上の対応物を考える
この時 $m=0$ で考えれば良いから
一般解が「Gauss分解」によって得られる。
又, τ関数を determinant で表わすことができる。



② $m \longrightarrow \infty$ を実行する。

5. $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 上のmodelの解の構成

・半分でぶったぎった模型で考える。

$$L=\begin{array}{c} \begin{matrix} 0 & 1 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} * & 1 & & \\ & * & 1 & O \\ & & \ddots & \ddots \\ * & & & \ddots \end{pmatrix}\end{array} \qquad \bar{L}=\begin{array}{c} \begin{matrix} 0 & 1 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} * & & & \\ * & * & & * \\ & * & \ddots & \\ O & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}\end{array} \qquad B_n=(L^n)_{\geq 0} \quad \bar{B}_n=(\bar{L}^n)_{\leq -1}$$

$$W=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & O \\ & & 1 & \\ w_{i-j}(i) & & & \ddots \end{pmatrix} \qquad \bar{W}=\begin{pmatrix} \ddots & & \bar{w}_{j-i}(i) \\ & \ddots & \\ O & & \ddots \end{pmatrix}$$

・注）このmodelでは e^{∂_n}, $e^{-\partial_n}$ は可換ではない，(はしからこぼれおちる)
　ので差分Operatorの表示は使わず，行列表示を使う。

$$\Lambda=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & O \\ & & 0 & \ddots \\ O & & & \ddots \end{pmatrix} \qquad \bar{\Lambda}=\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & O & \\ & 1 & 0 & & \\ & & 1 & \ddots & \\ O & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$ に対して，

$$L=W\Lambda W^{-1}, \quad \bar{L}=\bar{W}\bar{\Lambda}\bar{W}^{-1}$$ である。(3節)

・Gauss分解による解の構成

まず　$A(0,0)=(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ で $\det(a_{ij})_{0\leq i,j\leq A-1}\neq 0$ $\forall A$ なるものを1つとる。

たとえば $A=\begin{pmatrix} 1 & & O \\ & 1 & \\ * & & \ddots \end{pmatrix}$ や $A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & \ddots \\ O & & \ddots \end{pmatrix}$ ならばよろしい。

この成分は全て≠0

① $$A(z,\bar{z}) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} z_n\Lambda^n\right) A(0,0) \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\bar{z}_n\bar{\Lambda}^n\right)$$ とおく。

このA$(z,\bar{z})$をGauss分解する。

つまり $$W(z,\bar{z})=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & O \\ & \ddots & \\ w_{i-j}(i) & & \ddots \end{pmatrix} \qquad \bar{W}(z,\bar{z})=\begin{pmatrix} \ddots & \bar{w}_{j-i}(i) \\ O & \ddots \end{pmatrix}$$

をとって

$$A(z,\bar{z}) = W(z,\bar{z})^{-1}\,\overline{W}(z,\bar{z})$$ とする。（一意的）

② W, $\overline{W}$ の各成分 $w_n(s)$, $\overline{w}_n(s)$ は $A(z,\bar{z})$ の小行列式の比で書くことができる。

$$\begin{cases} w_n(s) = (-1)^n \dfrac{\langle 0,\cdots,\overset{\text{のぞく}}{\check{s-n}},\cdots s \mid A(z,\bar{z}) \mid s-1,\cdots\cdots 1,0\rangle}{\langle 0,\cdots\cdots\cdots s-1 \mid A(z,\bar{z}) \mid s-1,\cdots\cdots,0\rangle} \\[2ex] \overline{w}_n(s) = \dfrac{\langle 0,\cdots, s-1, s \mid A(z,\bar{z}) \mid s+n, s-1,\cdots 0\rangle}{\langle 0,\cdots\cdots s-1 \mid A(z,\bar{z}) \mid s-1,\cdots\cdots 0\rangle} \end{cases}$$

(Rem: $\langle I \mid A \mid J\rangle \overset{\text{def}}{=} \det\left(a_{ij}\,\middle|\, \begin{smallmatrix} i\in I \\ j\in J\end{smallmatrix}\right)$ と増大する順でとる.)

(実はこの分母が τ function となっている。④ でそのことは見る.)

これは II章5節と同様に示すことができる。

③ W, $\overline{W}$ のみたす方程式を導びき出す。

・まず $A = A(z,\bar{z})$ に対し
$$\begin{cases} \cdot\ \partial_n A = \partial_n\left(\exp(\sum z_n\Lambda^n)\, A_{(0,0)}\, \exp(-\sum_n \bar{z}_n \bar{\Lambda}^n)\right) \\ \qquad = \Lambda^n A \\ \cdot\ \bar{\partial}_n A = -A\bar{\Lambda}^n \end{cases}$$

であることに注意しておく。

$$\left(\text{特に } \partial_1 A = \Lambda A,\ \bar{\partial}_1 A = -A\bar{\Lambda} \text{ より } A = \begin{pmatrix} a_{00} & (-\bar{\partial})a_{00} & \cdots \\ \partial_1 a_{00} & & \\ \partial_1^2 a_{00} & & \\ \vdots & & \end{pmatrix} \text{ multi Wronskian の形である。}\right)$$

・$WA = \overline{W}$ を微分し A を消去する。

∂_n 微分をとると,
$$(\partial_n W)A + W(\partial_n A) = \partial_n \overline{W}$$ より

$$(\partial_n W) W^{-1} \overline{W} + W \Lambda^n W^{-1} \overline{W} = \partial_n \overline{W}$$

よって $\partial_n \overline{W} \cdot \overline{W}^{-1} = \partial_n W \cdot W^{-1} + W \Lambda^n W^{-1} \overset{\mathrm{def}}{\Leftarrow} B_n$ — ①

$\overline{\partial}_n$微分より
$\overline{\partial}_n W \cdot W^{-1} = \overline{\partial}_n \overline{W}\, \overline{W}^{-1} + \overline{W} \overline{\Lambda}^n \overline{W}^{-1} \overset{\mathrm{def}}{\Leftarrow} \overline{B}_n$ — ②

ここで $L \overset{\mathrm{def}}{=} W \Lambda W^{-1}$, $\overline{L} \overset{\mathrm{def}}{=} \overline{W} \overline{\Lambda} \overline{W}^{-1}$ とすると

$B_n = \partial_n \overline{W} \cdot \overline{W}^{-1} \in \mathfrak{g}_{\geq 0}$ ゆえ

$= (\partial_n W \cdot W^{-1} + L^n)_{\geq 0}$ ところが $\partial_n W \cdot W^{-1} \in \mathfrak{g}_{\leq -1}$ ゆえ

$= (L^n)_{\geq 0}$

全く同様に

$\overline{B}_n = (\overline{L}^n)_{\leq -1}$

・ ①より ‥‥ $\partial_n \overline{W} = B_n \overline{W}$, $\partial_n W = B_n W - W \Lambda^n$
②より ‥‥ $\overline{\partial}_n W = \overline{B}_n W$, $\overline{\partial}_n \overline{W} = \overline{B}_n \overline{W} - \overline{W} \overline{\Lambda}^n$

これらは3節の方程式系に他ならない。

よって $W . \overline{W}$ は $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ model の解を与えている。

以上で $(W. \overline{W})$ level での check が終了したので、次に τ 函数を同定しよう。

⑤ τ 函数は次によって与えられる。

$$\tau(s, z, \overline{z}) = \langle 0, \ldots, s-1 | A(z, \overline{z}) | s-1, \ldots, 0 \rangle$$

これをたしかめるには

ⓐ $1 + \sum_{n=1}^{\infty} w_n(s) \lambda^{-n}$ $\quad \dfrac{\tau(s, z - \varepsilon(\lambda^{-1}), \overline{z})}{\tau(s, z, \overline{z})}$

ⓑ $\sum_{n=0}^{\infty} \overline{w}_n(s) \lambda^n$ $\quad \dfrac{\tau(s+1, z, \overline{z} - \varepsilon(\lambda))}{\tau(s, z, \overline{z})}$

を示せばよい。

ⓐ の check.

まず $\varepsilon(\lambda^{-1}) = (\lambda^{-1}, \frac{\lambda^{-2}}{2}, \frac{\lambda^{-3}}{3}, \cdots\cdots)$ であった。 そこで $A(z,\bar{z})$ の定義より

$$
\begin{aligned}
A(z-\varepsilon(\lambda^{-1}), \bar{z}) &= \exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\big(z_n - \tfrac{\lambda^{-n}}{n}\big)\Lambda^n\Big) A \exp\Big(-\sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}_n \bar{\Lambda}^n\Big) \\
&= \exp\Big(-\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{\lambda^{-n}}{n} \Lambda^n\Big) A(z,\bar{z}) \\
&= \exp\big(\log(1-\lambda^{-1}\Lambda)\big) A(z,\bar{z}) \\
&= (1-\lambda^{-1}\Lambda) A = \begin{bmatrix} 1 & -\lambda^{-1} & & 0 \\ & 1 & -\lambda^{-1} & \\ & & 1 & \ddots \\ 0 & & & \ddots \end{bmatrix} A \qquad ☆)
\end{aligned}
$$

そこで 行列式

$\langle 0, \cdots s-1 | A(z-\varepsilon(\lambda^{-1}), \bar{z}) | s-1 \cdots 0 \rangle$ を計算するが、 ☆) の積の形より

$$
\tau(s, z-\varepsilon(\lambda^{-1}) \bar{z}) = \det\left(
\begin{array}{c} \\ 0 \\ \vdots \\ s-1 \end{array}
\begin{array}{c} 0 \quad 1 \quad \cdots \quad s-1 \quad s \\ \begin{bmatrix} 1 & -\lambda^{-1} & & & 0 \\ & 1 & -\lambda^{-1} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & -\lambda^{-1} \end{bmatrix} \end{array}
\begin{bmatrix} a_{00} & \cdots & a_{0s-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s0} & \cdots & a_{ss-1} \end{bmatrix}
\right)
$$

積の行列式の展開定理(数学事典第3版 225頁 84 F の5)) より

$$
= \sum_{k=0}^{s} \underbrace{\det \begin{bmatrix} 1 & -\lambda^{-1} & & & & \\ & 1 & \ddots & & 0 & \\ & & \ddots & -\lambda^{-1} & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & -\lambda^{-1} & \\ & & & & 1 & \ddots \\ & 0 & & & & 1 \;\; -\lambda^{-1} \end{bmatrix}}_{\substack{k\text{列を抜く} \\ (-\lambda^{-1})^{s-k}}}
\underbrace{\det \begin{bmatrix} a_{00} & & a_{0s-1} \\ & & \\ a_{k-1\,0} & & a_{k-1\,s-1} \\ a_{k+1\,0} & & a_{k+1\,s-1} \\ & & \\ a_{s0} & & a_{ss-1} \end{bmatrix}}_{\substack{k\text{行を抜く} \\ (-1)^{s-k} w_{s-k}(s)\, \tau(s) \\ (\because ②)}}
$$

$$
= \sum_{n=0}^{s} w_n(s) \lambda^{-n} \tau(s, z, \bar{z})
$$

よって ⓐ が成立する。

ⓑ の check

上記同様

$$A(z,\bar{z}-\varepsilon(\lambda)) = A(z,\bar{z})\exp\Big(\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n}\bar{\Lambda}^n}_{=-\log(1-\lambda\bar{\Lambda})}\Big)$$

$$= A(z,\bar{z})(1-\lambda\bar{\Lambda})^{-1}$$

$$= A(z,\bar{z})(1+\lambda\bar{\Lambda}+\lambda^2\bar{\Lambda}^2+\cdots\quad)$$ であるから

$$\tau(s+1,z,\bar{z}-\varepsilon(\lambda)) = \det \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ s \end{array}\begin{pmatrix} a_{00} & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \cdots \\ a_{s0} & \cdots & \cdots \end{pmatrix}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & & & s & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & \bigcirc & \\ \lambda & \ddots & & & \\ \lambda^2 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \lambda & \\ & & \ddots & \lambda^2 & \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ \\ s \\ s+1 \\ \\ \end{array}$$

今回は有限行列ではない!!

ⓐ同様,展開定理を使えば,

左行列より $i_0,\cdots,i_s$ $(i_0<\cdots<i_s)$ 列を取り出した $s+1$ 次行列の行列式と，右行列より $i_0,\cdots,i_s$ 行を取り出した行列の行列式の積の $(i_0,\cdots,i_s)$ についての和によって，この行列式は計算できる。

ところが，右の行列の s 行以降の部分 $\begin{vmatrix} \lambda^s & \cdots & \lambda^2 & \lambda & 1 \\ \lambda^{s+1} & \cdots & \lambda^3 & \lambda^2 & \lambda \\ \vdots & & & & \vdots \\ \lambda^{s+k} & \cdots & & & \lambda^k \\ \vdots & & & & \vdots \end{vmatrix}$ はどの2行も1次従属で

あるから，この部分から2行取るような取り方は和に寄与しない。

よって

$$\tau(s+1,z,\bar{z}-\varepsilon(\lambda)) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\det\begin{pmatrix} a_{00} & \cdots & a_{0\,s-1} & a_{0\,s+k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{s0} & \cdots & a_{s\,s-1} & a_{s\,s+k} \end{pmatrix}}_{\overline{W}_k(\partial)\,\tau(s,z,\bar{z})} \underbrace{\det\begin{pmatrix} 1 & & & \bigcirc \\ & \ddots & & \\ \bigcirc & & 1 & 0 \\ \lambda^{k+s} & \cdots & \lambda^{k+1} & \lambda^k \end{pmatrix}}_{\lambda^k}$$

よってこれで ⓑ も確かめられた。

6. $m \to \infty$ の手続き

① 半無限モデルでの、τ 函数の Shur 函数による展開

$$\tau(s, z, \bar{z}) = \langle 0, \cdots, s-1 | A(z, \bar{z}) | s-1, \cdots, 0 \rangle$$
$$= \langle 0, \cdots\cdots, s-1 | \exp(\sum z_n \Lambda^n) A \exp(-\sum \bar{z}_n \bar{\Lambda}^n) | s-1 \cdots\cdots, 0 \rangle$$

$A = A(0,0)$

前節のように行列式の展開を適用して

$$= \sum_{I, J} \langle 0, \cdots, s-1 | \exp(\sum z_n \Lambda^n) | I \rangle \langle I | A | J \rangle \langle J | \exp(-\sum \bar{z}_n \bar{\Lambda}^n) | s-1 \cdots 0 \rangle$$

$I = (i_0 i_1 \cdots i_{s-1}) \quad 0 \leq i_0 < i_1 \cdots < i_{s-1}$

$J = (j_0 j_1 \cdots j_{s-1}) \quad 0 \leq j_0 < j_1 \cdots < j_{s-1}$

今、$S_I(z) \overset{\text{def}}{=} \langle 0, \cdots, s-1 | \exp(\sum z_n \Lambda^n) | I \rangle$ とおけば、3節の記法を使って、
$\exp(\sum z_n \Lambda^n) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) \Lambda^n$ であるから、

$$S_I(z) = \det\left(P_{i_\alpha - \beta}(z)\right)_{\alpha, \beta = 0, \cdots, s-1} \qquad I = (i_\alpha) = (i_0, \cdots, i_{s-1})$$

である。

又、$\langle J | \exp(-\sum \bar{z}_n \bar{\Lambda}^n) | s-1 \cdots, 0 \rangle = S_J(-\bar{z})$ となることも直ちにわかる。

よって

$$\tau(s) = \sum_{I, J} S_I(z) A_{IJ} S_J(-\bar{z}) \quad , \quad A_{IJ} = \langle I | A(0,0) | J \rangle$$

という表示を得た。

・Rem このとき、$\bar{z}$ を固定すると これは z について KP hierarchy の τ 函数であり、
z を固定すると $\bar{z}$ について KP hierarchy の τ 函数となっている。

② $m \longrightarrow \infty$ の手続き.

・もともと. W. $\overline{W}$ に対する微分方程式を考えていたことに注意しよう。AはGauss分解によって W. $\overline{W}$ を生みだすものであったから, W, $\overline{W}$ の初期値 $W^{-1}_{(0,0)}$, $\overline{W}_{(0,0)}$ を与えて Aはformalに

$$A = \begin{pmatrix} \ddots & & 0 \\ & 1_{1} & \\ * & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddots & & * \\ & * & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} = W^{-1}(0,0)\ \overline{W}(0,0)$$

で与えられるものとしよう。この積は, もちろん一般に意味をもたぬが

$W^{-1}_{(0,0)} = (w^*_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}$, $\overline{W}(0,0) = (\overline{w}_{ij})_{ij\in\mathbb{Z}}$ に対し

$A^{(-m)} \overset{def}{=} (a^{(-m)}_{ij})_{-m\le i,j}$, $a^{(-m)}_{ij} \overset{def}{=} \sum_{k=-m}^{\infty} w^*_{ik}\overline{w}_{kj}$ とすれば,

この積は有限である。

そこでこの $A^{(-m)} = A^{(-m)}(0,0)$ から出発し, τ函数 $\tau_{-m}(A, z, \bar{z})$ を構成する。

今 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ を $\dfrac{a_{s+1}}{a_s} = \overline{w}_0(s) \ (= \overline{w}_{ss})$ で決めると, $s \geq -m$ に対し

$\lim_{m\to\infty} a_{-m}\tau_{-m}(s, z, \bar{z})$ が存在することがわかる。つまり,

$\lim_{m\to\infty} a_{-m} A^{(-m)}_{IJ}$ が存在する。(実際は mが十分大で一定の値となる)

このように, <u>τ函数の定数倍の不定性をうまく調節する</u>ことで,

$$A_{IJ} = \lim_{m\to\infty} a_{-m} A^{(-m)}_{IJ}$$

が定義され, $m\longrightarrow\infty$ の手続が完了される。

以上の詳細は [10] を参照のこと。

IV 無分散極限－準古典極限

この章の参考文献

[14] O. I. Bogoyavlensky, "Some constructions of integrable dynamical systems," Math. USSR Izvestiya 31(1988), 47~35

[15] Saveliev, Versik, "Continual analogues of contragradient Lie algebras," Commun. Math. Phys 126(1989) 376~378

[16] Y. Kodama, "Solutions of the dispersionless Toda equation" Phys. Lett. A147(1990), 477~482

[17] Bakas, "The structure of the W_∞ algebra" Comm. Math. Phys. 134(1990) 487~508

[18] Park, "Extended conformal symmetries in real heavens", Phys. Lett. B236(1990) 429~432

[19] K. Takasaki, T. Takebe "SDiff(2) Toda-equation-hierarchy, tau function and symmetries", Lett. Math. Phys. 23(1991) 205~214

・自己双対 Einstein equation との関係は

[20] C. P. Boyer, J. D. Finley, "Killing vectors in self-dual Euclidean Einstein spaces", J. Math. Phys. 23(1982), 1126~1128

・自己双対 Einstein equation については

[21] K. Takasaki, "Symmetries of hyper-Kähler (or Poisson gauge field) hierarchy", J. Math. Phys. 31(1990), 1877~1888

・関連する話題については

[22] J. Hoppe, Lect. Note in Phys. Monograph series no. 10, Springer (1992)

1. Scaling limit

・Motivation

KdV 方程式 $u_t = uu_x + u_{xxx}$, $u = u(x,t)$ において, u_{xxx} を分散項と呼ぶ。

今, $t \longrightarrow \hbar^{-1}t$, $x \longrightarrow \hbar^{-1}x$, $u \longrightarrow u = u(\hbar, x, t) = u^0(x,t) + O(\hbar)$ として, $\hbar \longrightarrow 0$ とする。このような操作を Scaling 極限という。これは long distance behavior を強調することにあたる。これにより KdV 方程式から

$u_t = uu_x$ ：無分散 KdV 方程式を得る。(非線型項のみが残った。)

この方程式は hodograph 変換によって解くことができる。
すなわち、f（任意函数）を与えて、

$$u = f(x+ut)$$ を u について解けば それが解である。

このようなことを Toda 場の方程式に対しても行いたい。

- 2次元戸田場の方程式

$$\partial\bar{\partial}u(s) + e^{u(s+1)-u(s)} - e^{u(s)-u(s-1)} = 0$$

において、$z \longrightarrow \hbar^{-1}z$, $\bar{z} \longrightarrow \hbar^{-1}\bar{z}$, $s \longrightarrow \hbar^{-1}s$, $u \longrightarrow \hbar^{-1}u$ とおきかえ、
更に変数 $s \in \mathbb{Z}$ を $s \in \mathbb{R}$ と思いなおすと、

$\partial \longrightarrow \hbar\partial$, $\bar{\partial} \longrightarrow \hbar\bar{\partial}$, $s \longrightarrow \sigma = \hbar^{-1}s$, $s = \hbar\sigma$, $s+1 = \hbar(\sigma+1) = s+\hbar$ より

$$\partial\bar{\partial}u(s) + \frac{e^{\hbar^{-1}(u(s+\hbar)-u(s))} - e^{\hbar^{-1}(u(s)-u(s-\hbar))}}{\hbar} = 0$$

ここで、$u(s) = u(\hbar, s, z, \bar{z}) = u^0(s, z, \bar{z}) + O(\hbar)$ を仮定し、$\hbar \longrightarrow 0$ とすると

$$\partial\bar{\partial}u^0 + \frac{\partial}{\partial s}\exp\frac{\partial u^0}{\partial s} = 0$$ （上式第2項の $\hbar\to 0$ の limit は $e^{\frac{\partial u}{\partial s}} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$ ）

これが戸田場の scaling 極限である。

- 他の変数の scaling はどうなるだろうか？

① τ 函数。

$$u(s) = \log\frac{\tau(s+1)}{\tau(s)}$$ は scaling によって、

$$\downarrow$$

$$u(\hbar, s) = \hbar\left(\log(\tau(\hbar, s+\hbar)) - \log(\tau(\hbar, s))\right)$$ となる。

ここで $\tau(\hbar, s) = \exp(\hbar^{-2}F(s) + O(\hbar^{-1}))$ という要請をおくと、

$$u(\hbar, s) = \frac{F(s+\hbar) - F(s) + O(\hbar^2)}{\hbar} \sim \frac{\partial F}{\partial s} + O(\hbar)$$

よって $\hbar \longrightarrow 0$ で

$$u^0(s) = \frac{\partial F}{\partial s}$$ と考えられる。

この F を自由エネルギーと呼ぶ。

② v 函数

$v(s) = u(s) - u(s-1)$ は scaling で
$\downarrow$
$v(\hbar, s) = \hbar^{-1}\left(u(\hbar, s) - u(\hbar, s-\hbar)\right) \sim \frac{\partial u^0(s)}{\partial s}$

よって $v^0(s) = \frac{\partial u^0}{\partial s}$ と考えられる。

● これら相互の関係は、（以下 u^0, v^0 などの ^{0} は はぶく）

$$\partial\bar{\partial}F + \exp\partial_s^2 F = 0$$

s で積分 ↑ ↓ $u = \partial_s F$

（積分定数は、v, u, F の再定義 で吸収させる）

uの方程式 $$\partial\bar{\partial}u + \partial_s \exp\partial_s u = 0$$

s で微分 ↓ ↓ $v = \partial_s u$

$$\partial\bar{\partial}v + \partial_s^2 \exp v = 0$$

これは Liouville の方程式に近い。変分原理からも導出できる方程式である。

2 自己双対重力との関係

① $(p, \hat{p}, q, \hat{q})$ 独立変数とする。

$\Omega = \Omega(p, \hat{p}, q, \hat{q})$ 未知函数 （ Kähler potential ）

に対する
自己双対 Einstein equation（$\Lambda = 0$ のもの）は、次の方程式に帰着する。

$$\underline{\partial_p\partial_{\hat{p}}\Omega\,\partial_q\partial_{\hat{q}}\Omega - \partial_p\partial_{\hat{q}}\Omega\cdot\partial_q\partial_{\hat{p}}\Omega = 1}$$

（ Ricci flat Kähler geometry の local な表現）

② S^1-symmetry

今 $\Omega = \omega(p\hat{p}, q, \hat{q})$ という要請をおくと，$r \overset{\mathrm{def}}{\Leftarrow} p\hat{p}$ として

$$\begin{cases} \partial_p\partial_{\hat{p}}\Omega = \partial_r\omega + r\partial_r^2\omega = \partial_r(r\partial_r\omega) \\ \partial_p\partial_{\hat{q}}\Omega = \hat{p}\,\partial_{\hat{q}}\partial_r\omega, \quad \partial_q\partial_{\hat{p}}\Omega = p\,\partial_q\partial_r\omega \end{cases}$$ ゆえ

自己双対 Einstein eq は

$$\partial_r(r\partial_r\omega)\cdot\partial_q\partial_{\hat{q}}\omega - r\,\partial_q\partial_r\omega\cdot\partial_{\hat{q}}\partial_r\omega = 1 \quad \text{—(1)}$$ となる

③

$s \Leftarrow r\partial_r\omega$，$Q \Leftarrow \partial_q\omega$，$\hat{Q} \Leftarrow \partial_{\hat{q}}\omega$ とおけば

$d\omega = s\,d(\log r) + Q\,dq + \hat{Q}\,d\hat{q}$ であり，

$$(1) \Longleftrightarrow \partial_r s\cdot\partial_q\hat{Q} - \partial_q s\cdot\partial_r\hat{Q} = 1 \quad \text{—㋐}$$

$$\Longleftrightarrow \partial_r s\cdot\partial_{\hat{q}}Q - \partial_{\hat{q}}s\cdot\partial_r Q = 1 \quad \text{—㋑}$$

このとき，

$$ds\wedge d\hat{Q}\wedge d\hat{q} = \frac{\partial(s,\hat{Q})}{\partial(r,q)}\,dr\wedge dq\wedge d\hat{q} \overset{\text{㋐}}{=} dr\wedge dq\wedge d\hat{q} \quad \text{—(2)}$$

$$ds\wedge dQ\wedge dq = \frac{\partial(s,Q)}{\partial(r,\hat{q})}\,dr\wedge d\hat{q}\wedge dq \overset{\text{㋑}}{=} dr\wedge d\hat{q}\wedge dq \quad \text{—(3)}$$

④ 独立変数を $(r, q, \hat{q})$ から $(s, q, \hat{q})$ にとりなおす。（Legendre 変換）

・$v \Leftarrow \log r$ とおけば

$d\omega = s\,dv + Q\,dq + \hat{Q}\,d\hat{q}$

・更に $u \Leftarrow sv - \omega$ （基本的な Legendre 変換）とおくと，

$du = v\,ds + s\,dv - d\omega = v\,ds - Q\,dq - \hat{Q}\,d\hat{q}$

よって
$$\begin{cases} v = \partial_s u(s,q,\hat{q}) & \text{—(4)} \\ Q = -\partial_q u(s,q,\hat{q}) & \text{—(5)} \\ \hat{Q} = -\partial_{\hat{q}} u(s,q,\hat{q}) & \text{—(6)} \end{cases}$$

ここで (2)式の左辺 $= ds\wedge d\hat{Q}\wedge d\hat{q} = \dfrac{\partial \hat{Q}}{\partial q} ds\wedge dq\wedge d\hat{q}$

右辺 $= d(e^{v})\wedge dq\wedge d\hat{q} = \dfrac{\partial(e^{v})}{\partial s} ds\wedge dq\wedge d\hat{q}$

ゆえ $\dfrac{\partial \hat{Q}}{\partial q} = \dfrac{\partial}{\partial s}(e^{v})$ (4),(6)より $\underline{-\dfrac{\partial^2 u}{\partial q\partial \hat{q}} = \dfrac{\partial}{\partial s}\exp\dfrac{\partial u}{\partial s}}$

↑ 1節のeqと同じ

● 同様に(3)式の左辺，右辺と(4),(5)からも同じ方程式が出る。

このようにして，1つは戸田場のscaling limitより，1つはS^1対称性をもつ自己双対Einstein方程式より出た，同一の方程式を扱う。

3. 零曲率方程式

● 方程式を零曲率の形で与えよう。

① (p,s) 独立変数。(このpは2節のものとは違う。) $\theta = \log p$ として

(θ, s)についてのPoisson bracketを考える。つまり f, g に対して

$$\{f,g\} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial g}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial g}{\partial \theta} = p\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial s} - p\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial g}{\partial p}$$

このとき，$\{\theta, s\} = 1$ である。

$d\theta\wedge ds = \dfrac{dp}{p}\wedge ds$ が symplectic form である。

② $\mathbb{B}, \overline{\mathbb{B}}$ を

$$\mathbb{B} \stackrel{\text{def}}{=} p + b(s) \quad \overline{\mathbb{B}} \stackrel{\text{def}}{=} a(s)p^{-1}, \quad b(s) = \partial_s u(s) \quad a(s) = \exp \partial_s u(s)$$

で定義する。 $u = u(s, z, \bar{z})$

このとき.

$$\partial\bar{\partial}u + \partial_s \exp \partial_s u = 0 \iff \begin{cases} \bar{\partial} b + \partial_s a = 0 \\ \partial a = a \partial_s b \end{cases}$$

← 戸田では s に対する shift だったものが s 微分に化けた。

$$\iff \bar{\partial}\mathcal{B} - \partial\bar{\mathcal{B}} + \{\mathcal{B}, \bar{\mathcal{B}}\} = 0$$

(この中の p^0, p^1 の係数が上の eq になる)

最後の方程式は零曲率の形をしている。
([,] のかわりに Poisson bracket が出た。)

しかし, 今の場合 W, $\overline{W}$ に対応するものがないので, 戸田場の手法をそのまま使うわけにはいかない。
以下紹介するのは [19] Takasaki-Takebe の方法である。基本的な考え方は自己双対重力に対する方法 [21] Takasaki と同様である。

4. 閉2次形式 ω と Darboux 座標

- 2 form ω を $\omega = d\log p \wedge ds + d\mathcal{B} \wedge dz + d\bar{\mathcal{B}} \wedge d\bar{z}$ で定義する。
 $d\omega = 0$ であり 更に

$$\text{零曲率方程式} \iff \omega \wedge \omega = 0$$

- この ω に対する Darboux 座標をとろう。

① Darboux の定理 (例えば, 岩波基礎数学「一階偏微分方程式」定理1.6 参照)
によって $\exists \mathcal{P}, \mathcal{Q}$ $\quad \omega = \dfrac{d\mathcal{P}}{\mathcal{P}} \wedge d\mathcal{Q}$ (local に)

($\omega = d\Theta \wedge d\mathcal{Q}$ なる $\Theta, \mathcal{Q}$ をとって $\Theta = \log \mathcal{P}$ とおく)

② $\omega = \dfrac{d\mathcal{P}}{\mathcal{P}} \wedge d\mathcal{Q}$ であることと次は同値.

$$\begin{cases} \partial \mathcal{P} = \{\mathcal{B}, \mathcal{P}\} , & \partial \mathcal{Q} = \{\mathcal{B}, \mathcal{Q}\} \\ \bar\partial \mathcal{P} = \{\bar{\mathcal{B}}, \mathcal{P}\} , & \bar\partial \mathcal{Q} = \{\bar{\mathcal{B}}, \mathcal{Q}\} \end{cases}$$

（Lax eq の類似）

〔証明〕

$\omega = d\theta \wedge ds + d\mathcal{B} \wedge dz + d\bar{\mathcal{B}} \wedge d\bar z$　　$(\theta = \log p)$

$\parallel$

$d\log\mathcal{P} \wedge d\mathcal{Q}$ とすると この両辺の

- $d\theta \wedge ds$ の係数を比較し　$\dfrac{\partial(\log\mathcal{P}, \mathcal{Q})}{\partial(\theta, s)} = 1$ —㊟
- $d\theta \wedge dz$ の係数を比較し

$$\frac{\partial(\log\mathcal{P}, \mathcal{Q})}{\partial(\theta, z)} = \frac{\partial\mathcal{B}}{\partial\theta} \quad \text{—①}$$

- $ds \wedge dz$　　〃

$$\frac{\partial(\log\mathcal{P}, \mathcal{Q})}{\partial(s, z)} = \frac{\partial\mathcal{B}}{\partial s} \quad \text{—②}$$

- 以下同様に

$$\frac{\partial(\log\mathcal{P}, \mathcal{Q})}{\partial(\theta, \bar z)} = \frac{\partial\bar{\mathcal{B}}}{\partial\theta} \ \text{—③}\ (d\theta\wedge d\bar z), \quad \frac{\partial(\log\mathcal{P}, \mathcal{Q})}{\partial(s, \bar z)} = \frac{\partial\bar{\mathcal{B}}}{\partial s} \ \text{—④}\ (ds\wedge d\bar z)$$

①②③④ を まとめて行列表示すれば

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\mathcal{B}}{\partial\theta} & \dfrac{\partial\bar{\mathcal{B}}}{\partial\theta} \\[2ex] \dfrac{\partial\mathcal{B}}{\partial s} & \dfrac{\partial\bar{\mathcal{B}}}{\partial s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial\mathcal{Q}}{\partial\theta} & \dfrac{\partial\log\mathcal{P}}{\partial\theta} \\[2ex] -\dfrac{\partial\mathcal{Q}}{\partial s} & \dfrac{\partial\log\mathcal{P}}{\partial s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\log\mathcal{P}}{\partial z} & \dfrac{\partial\log\mathcal{P}}{\partial\bar z} \\[2ex] \dfrac{\partial\mathcal{Q}}{\partial z} & \dfrac{\partial\mathcal{Q}}{\partial\bar z} \end{pmatrix}$$

㊟より この行列式 $= 1$ であることに注意して、 この行列について 等式を 解けばよい。 ▨

5. 特別なDarboux座標対

Darboux座標がLorent展開出来るという仮定のもとで
次のような2つのDarboux座標を選ぶことが可能である。

$p=\infty$のまわりで

$$\begin{cases} \mathcal{L} = p + \sum_{n=-\infty}^{0} u_n p^n \\ \mathcal{M} = z\mathcal{L} + s + \sum_{n=-\infty}^{-1} v_n \mathcal{L}^n \end{cases}$$

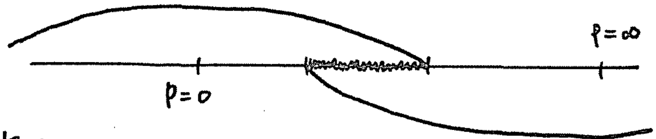
$p=0$のまわりで

$$\begin{cases} \bar{\mathcal{L}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n p^n \\ \bar{\mathcal{M}} \quad -\bar{z}\bar{\mathcal{L}}^{-1} + s + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}_n \bar{\mathcal{L}}^n \end{cases}$$

この$\bar{\mathcal{L}}$は前節までの記号でいえば、むしろ$\bar{L}^{-1}$に相当する。(行きがかり上そのようになってしまった。おわびする。)

(更に、この係数たちは、uに対する微分方程式を順に解くことで得られる。
たとえば、$u_0 = \partial u$, $\bar{\partial} u = \bar{u}_2 u_1^{-2}$ etc)

ここで仮定"上記の2つの収束半径は重なる" をおく。(実際、$(z,\bar{z})=(0,0)$の近くで考える限り、このような$\mathcal{L}, \mathcal{M}, \bar{\mathcal{L}}, \bar{\mathcal{M}}$が選べる。一般に局所的考察においては同様のことがいえる)



このとき、重なった部分で、

$$d\log\mathcal{L}\wedge d\mathcal{M} = \omega = d\log\bar{\mathcal{L}}\wedge d\bar{\mathcal{M}} \quad ゆえ$$

$\exists \begin{cases} f = f(\lambda,\mu) \\ g = g(\lambda,\mu) \end{cases}$ symplectic diffeo, such that (*) $\begin{cases} \bar{\mathcal{L}} = f(\mathcal{L},\mathcal{M}) \\ \bar{\mathcal{M}} = g(\mathcal{L},\mathcal{M}) \end{cases}$

特に $$\frac{\partial(\log f, g)}{\partial(\log\lambda, \mu)} = 1$$ (このsymplectic diffeoがGauss分解にあたる。)

そこで、逆構成 $(f,g) \longrightarrow (\mathcal{L},\mathcal{M})\ (\bar{\mathcal{L}},\bar{\mathcal{M}})$ が実行できれば零曲率方程式の解が得られることになる。これは、もともとの戸田場や戸田ヒエラルキーの場合と違って一般には、

具体的に行うことが難しいが，抽象的な存在定理はつくれる。例えば，(f,g) が symplectic diffeo として恒等変換に近ければ，(※) をみたす，$\mathcal{L}, \mathcal{M}, \bar{\mathcal{L}}, \bar{\mathcal{M}}$ の存在は保証されている。幾何学的には，これは twistor construction の一種である。

6. hierarchy の構成

- 戸田場のときと同様に hierarchy を構成しよう。

$(z, \bar{z}) = (z_1, z_2, \cdots, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \cdots)$ 独立変数

$$\begin{cases} \mathcal{L}, \mathcal{M} \\ \bar{\mathcal{L}}, \bar{\mathcal{M}} \end{cases}$$

ここで

$$\mathcal{M} = \sum_{n=1}^{\infty} n z_n \mathcal{L}^n + s + \sum_{n=-1}^{\infty} v_n \mathcal{L}^n$$

$$\bar{\mathcal{M}} = -\sum_{n=1}^{\infty} n \bar{z}_n \bar{\mathcal{L}}^{-n} + s + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}_n \bar{\mathcal{L}}^n$$

Lax 方程式系（8 type の方程式系）

$$\begin{cases} \cdot\ \partial_n \mathcal{L} = \{\mathcal{B}_n, \mathcal{L}\} \\ \cdot\ \partial_n \mathcal{M} = \{\mathcal{B}_n, \mathcal{M}\} \\ \cdot\ \{\mathcal{L}, \mathcal{M}\} = \mathcal{L}, \quad \{\bar{\mathcal{L}}, \bar{\mathcal{M}}\} = \bar{\mathcal{L}} \quad \text{etc} \end{cases} \quad \text{etc}$$

これらが hierarchy を構成する。

今 $\omega \Leftarrow d\log p \wedge ds + \sum d\mathcal{B}_n \wedge dz_n + \sum d\bar{\mathcal{B}}_n \wedge d\bar{z}_n$ とおくと

上の方程式系は

$$\underline{\omega = d\log \mathcal{L} \wedge d\mathcal{M} = d\log \bar{\mathcal{L}} \wedge \bar{\mathcal{M}}}$$

と同値である。

- 更にこれらは零曲率方程式系の形では，

$$\begin{cases} \partial_n \mathcal{B}_m - \partial_m \mathcal{B}_n + \{\mathcal{B}_m, \mathcal{B}_n\} = 0 \\ \bar{\partial}_n \bar{\mathcal{B}}_m - \bar{\partial}_m \bar{\mathcal{B}}_n + \{\bar{\mathcal{B}}_m, \bar{\mathcal{B}}_n\} = 0 \\ \bar{\partial}_n \mathcal{B}_m - \partial_m \bar{\mathcal{B}}_n + \{\mathcal{B}_m, \bar{\mathcal{B}}_n\} = 0 \end{cases}$$

と書ける。（これは $\omega \wedge \omega = 0$ と同値である。）

□ 自由エネルギー

次の方程式によって自由エネルギー $F(s, z, \bar{z})$ を定義する。

$$dF = \sum_{n=1}^{\infty} v_{-n}\, dz_n - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}_n\, d\bar{z}_n + u\,ds$$

実際、右辺の 1 form は閉微分形式になるので、少くとも局所的には F が存在する。

- この設定で、前と同様に (f, g) という data をひき出して一種の twistor construction を行うことができる。

7. 戸田 hierarchy との関係

- 戸田場の方程式に対して scaling 極限を考えたように、戸田 hierarchy に対しても scaling 極限をつくることができる。

それが 6 節で示した hierarchy に他ならないことを示そう。
(以下の議論は [16] Kodama の方法を発展させたものである。)

① もとの戸田 hierarchy には $\hbar$ が入っていないので、以下のようにして入れる。
まず、L と $\bar{L}$ はそれぞれ

$$L = e^{\hbar\partial_s} + \sum_{n\le 0} u_n(\hbar, s)\, e^{-n\hbar\partial_s}$$

$$\bar{L} = \sum_{n\ge 1} \bar{u}_n(\hbar, s)\, e^{n\hbar\partial_s}$$

という形をとるとする。(ここでも $\bar{L}$ は前節までの $\bar{L}^{-1}$ に相当する。)
Lax 方程式は

$$\hbar\partial_n L = [B_n, L], \qquad \hbar\bar{\partial}_n L = [\bar{B}_n, L],$$

$$\hbar\partial_n \bar{L} = [B_n, \bar{L}], \qquad \hbar\bar{\partial}_n \bar{L} = [\bar{B}_n, \bar{L}],$$

$$B_n = (L^n)_{\ge 0}, \quad \bar{B}_n = (\bar{L}^{-n})_{\le -1}$$

で与えられる。要するに量子力学の処法を真似して

$$\partial_s \longrightarrow \hbar\partial_s, \quad \partial_n \longrightarrow \hbar\partial_n, \quad \bar{\partial}_n \longrightarrow \hbar\bar{\partial}_n$$

とおきかえたのである。(但し量子力学では $\pm i$ が掛かる。)

さらに、係数 u_n, $\bar{u}_n$ に対して

$$\begin{cases} u_n(\hbar, A) = u^{(0)}_n(A) + O(\hbar), \\ \bar{u}_n(\hbar, A) = \bar{u}^{(0)}_n(A) + O(\hbar), \qquad \hbar \to 0 \end{cases}$$

というふるまいを仮定する。このとき、

$$\begin{cases} \mathcal{L} = p + \sum_{n \le 0} u^{(0)}_n(A)\, p^n \\ \bar{\mathcal{L}} = \sum_{n \ge 1} \bar{u}^{(0)}_n(A)\, p^n \end{cases}$$

とおくと、これらは前節のような Lax 方程式をみたすのである。

実際、差分作用素の交換子を $\hbar$ 展開で考えると、ちょうど微分作用素や擬微分作用素と同じように、主導項は Poisson-bracket となる。
ただし微分の場合と違って、基本的な交換子は、

$$[e^{\hbar\partial_A}, A] = \hbar e^{\hbar\partial_A} \longrightarrow \{p, A\} = p$$

というように対応する。こうして戸田場の場合も含めて、Poisson bracket の起源が明らかになった。scaling 極限の parameter を $\hbar$ と書いてきた理由も、これで了解されるだろう。

② M, $\bar{M}$ の由来を見るために、W, $\bar{W}$ を考える。$\hbar$ が入っているとき、W と $\bar{W}$ も

$$W = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} w_n(\hbar, A)\, e^{-n\hbar\partial_A},$$

$$\bar{W} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{w}_n(\hbar, A)\, e^{n\hbar\partial_A},$$

という形に構成される。L, $\bar{L}$ はこれらを用いて、

$$L = W e^{\hbar\partial_A} W^{-1}, \quad \bar{L} = \bar{W} e^{\hbar\partial_A} \bar{W}^{-1}$$

と書ける。さらに W, $\bar{W}$ を適当にとりなおすと、Lax 方程式系は、

$$\hbar \partial_n W = B_n W - W e^{n\hbar\partial_s}$$
$$\hbar \partial_n \bar{W} = B_n \bar{W}$$
$$\hbar \bar{\partial}_n W = \bar{B}_n W$$
$$\hbar \bar{\partial}_n \bar{W} = \bar{B}_n \bar{W} - \bar{W} e^{-n\hbar\partial_s}$$

という方程式に変換される。このとき新しい差分作用素 $M, \bar{M}$ を

$$M = W\left(\sum_{n=1}^{\infty} n z_n e^{n\hbar\partial_s} + s\right) W^{-1}$$
$$\bar{M} = \bar{W}\left(-\sum_{n=1}^{\infty} n \bar{z}_n e^{-n\hbar\partial_s} + s\right) \bar{W}^{-1}$$

で定義すると，$M, \bar{M}$ は $L, \bar{L}$ と同じ形の Lax 方程式

$$\hbar\partial_n M = [B_n, M], \quad \hbar\bar{\partial}_n M = [\bar{B}_n, M]$$
$$\hbar\partial_n \bar{M} = [B_n, \bar{M}], \quad \hbar\bar{\partial}_n \bar{M} = [\bar{B}_n, \bar{M}]$$

ならびに正準交換関係

$$[L, M] = \hbar L \quad , [\bar{L}, \bar{M}] = \hbar \bar{L}$$

をみたすことがわかる。そこで $M, \bar{M}$ の展開

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} n z_n L^n + s + \sum_{n\le -1} v_n(\hbar, s) e^{n\hbar\partial_s},$$
$$\bar{M} = -\sum_{n=1}^{\infty} n \bar{z}_n \bar{L}^{-n} + s + \sum_{n\ge 1} \bar{v}_n(\hbar, s) e^{n\hbar\partial_s},$$

の係数 $v_n, \bar{v}_n$ に対して，$u_n, \bar{u}_n$ と同様の漸近的ふるまい，

$$v_n(\hbar, s) = v_n^{(0)}(s) + O(\hbar)$$
$$\bar{v}_n(\hbar, s) = \bar{v}_n^{(0)}(s) + O(\hbar), \qquad \hbar \to 0$$

を仮定すれば（実際は，$W, \bar{W}$ をうまく選ぶことで，これは満たされる）

$$\mathcal{M} = \sum_{n=1}^{\infty} n z_n \mathcal{L}^n + s + \sum_{n\le -1} v_n^{(0)}(s) \mathcal{L}^n$$
$$\bar{\mathcal{M}} = -\sum_{n=1}^{\infty} n \bar{z}_n \bar{\mathcal{L}}^{-n} + s + \sum_{n\ge 1} \bar{v}_n^{(0)}(s) \bar{\mathcal{L}}^n$$

により定義されるLaurent級数は前節のhierarchyが要求する残りの方程式をみたす。

③ 量子力学との類似は、さらに深いレベルにまで及ぶ。それを見るために、新たな変数λを用意して、

$$\Psi = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} w_n(\hbar, s)\lambda^{-n}\right) \exp\left[\hbar^{-1}\left(s \log\lambda + \sum_{n=1}^{\infty} z_n \lambda^n\right)\right]$$

$$\bar{\Psi} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \bar{w}_n(\hbar, s)\lambda^{n}\right) \exp\left[\hbar^{-1}\left(s \log\lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}_n \lambda^{-n}\right)\right]$$

というものをつくる。このとき、$W, \bar{W}$と、$L, \bar{L}, M, \bar{M}$を結ぶ関係は、

$$L\Psi = \lambda\Psi \ , \quad M\Psi = \hbar\lambda\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda} \ ,$$

$$\bar{L}\bar{\Psi} = \lambda\bar{\Psi} \ , \quad \bar{M}\bar{\Psi} = \hbar\lambda\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial\lambda} \ ,$$

というように書きなおされる。さらに$W, \bar{W}$の発展方程式は、

$$\hbar\partial_n\Psi = B_n\Psi \ , \quad \hbar\bar{\partial}_n\Psi = \bar{B}_n\Psi \ ,$$

$$\hbar\partial_n\bar{\Psi} = B_n\bar{\Psi} \ , \quad \hbar\bar{\partial}_n\bar{\Psi} = \bar{B}_n\bar{\Psi}$$

というように書き直される。これらは（±iがないことをのぞけば）量子力学のSchrödinger方程式にそっくりである。特に$\Psi, \bar{\Psi}$はWKB形

$$\Psi = \exp\left[\hbar^{-1}S(s, z, \bar{z}, \lambda) + O(\hbar^0)\right] \ ,$$

$$\bar{\Psi} = \exp\left[\hbar^{-1}\bar{S}(s, z, \bar{z}, \lambda) + O(\hbar^0)\right] \ , \quad \hbar \to 0$$

をもつ。ここで$S, \bar{S}$は

$$S(s, z, \bar{z}, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \lambda^n + s\log\lambda + \sum_{n \le -1} S_n(s, z, \bar{z})\lambda^n$$

$$\bar{S}(s, z, \bar{z}, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}_n \lambda^{-n} + s\log\lambda + \sum_{n \ge 1} \bar{S}_n(s, z, \bar{z})\lambda^n ,$$

という形をしている。

$S, \bar{S}$は「Hamilton-Jacobi方程式」として

$$\lambda\frac{\partial S}{\partial\lambda} = \mathcal{M}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n z_n \lambda^n + A + \sum_{n\le -1} v_n^{(0)}(A)\lambda^n$$

$$\lambda\frac{\partial \bar{S}}{\partial\lambda} = \bar{\mathcal{M}}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} -\sum_{n=1}^{\infty} n \bar{z}_n \lambda^{-n} + A + \sum_{n\ge 1} \bar{v}_n^{(0)}(A)\lambda^n$$

$$\partial_n S = \mathcal{B}_n\left(\exp\frac{\partial S}{\partial A}\right), \quad \bar{\partial}_n S = \bar{\mathcal{B}}_n\left(\exp\frac{\partial S}{\partial A}\right)$$

$$\partial_n \bar{S} = \mathcal{B}_n\left(\exp\frac{\partial \bar{S}}{\partial A}\right), \quad \bar{\partial}_n \bar{S} = \bar{\mathcal{B}}_n\left(\exp\frac{\partial \bar{S}}{\partial A}\right)$$

という方程式系を満たす。ここで $\mathcal{B}_n, \bar{\mathcal{B}}_n$ は $B_n, \bar{B}_n$ から

$$B_n = e^{n\hbar\partial_A} + \sum_{i=0}^{n-2} b_{n,i}(\hbar, A)e^{i\hbar\partial_A} \longrightarrow \mathcal{B}_n(p) = p^n + \sum_{i=0}^{n-2} b_{n,i}^{(0)}(A)p^i$$

$$\bar{B}_n = \sum_{i=-n}^{-1} \bar{b}_{n,i}(\hbar, A)e^{i\hbar\partial_A} \longrightarrow \bar{\mathcal{B}}_n(p) = \sum_{i=-n}^{-1} \bar{b}_{n,i}^{(0)}(A)p^i$$

$$b_{n,i}(\hbar, A) = b_{n,i}^{(0)}(A) + O(\hbar), \quad \bar{b}_{n,i}(\hbar, A) = \bar{b}_{n,i}^{(0)}(A) + O(\hbar), \quad \hbar\to 0$$

というように得られる。

これらの方程式の意味をさぐるために、次のような1-formの方程式にまとめてみる。

$$dS = \mathcal{M}(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{\partial S}{\partial A}dA + \sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{B}_n\left(\exp\frac{\partial S}{\partial A}\right)dz_n + \sum_{n=1}^{\infty}\bar{\mathcal{B}}_n\left(\exp\frac{\partial S}{\partial A}\right)d\bar{z}_n \quad \text{— ①}$$

$$d\bar{S} = \bar{\mathcal{M}}(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{\partial \bar{S}}{\partial A}dA + \sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{B}_n\left(\exp\frac{\partial \bar{S}}{\partial A}\right)dz_n + \sum_{n=1}^{\infty}\bar{\mathcal{B}}_n\left(\exp\frac{\partial \bar{S}}{\partial A}\right)d\bar{z}_n \quad \text{— ②}$$

①,②は外微分により、2-formの方程式となるが、<u>実はこれらは $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \bar{\mathcal{L}}, \bar{\mathcal{M}}$ に対する2-formの方程式（前節）と同等である。</u>それを見るために②における λ を①における λ と区別して $\hat{\lambda}$ と書いて、Legendre変換

$$\frac{\partial S(A, z, \bar{z}, \lambda)}{\partial A} = p, \quad \frac{\partial \bar{S}(A, z, \bar{z}, \hat{\lambda})}{\partial A} = p \quad (\lambda, \hat{\lambda} \text{ について逆にとく。})$$

により函数 $\lambda = \mathcal{L}(A, z, \bar{z}, p)$　$\hat{\lambda} = \bar{\mathcal{L}}(A, z, \bar{z}, p)$ を定義する。このとき、

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(\lambda)\Big|_{\lambda=\mathcal{L}(A,z,\bar{z},p)}, \quad \bar{\mathcal{M}} = \bar{\mathcal{M}}(\hat{\lambda})\Big|_{\hat{\lambda}=\bar{\mathcal{L}}(A,z,\bar{z},p)}$$

とおけば、①,②から得られる2-formの方程式は前節の方程式に完全に一致することがわかる。